

Indice

1	L'equazione di Klein-Gordon	1
1.1	Dall'equazione di Schrödinger all'equazione di Klein-Gordon	1
1.2	Covarianza dell'equazione e paradosso di Klein	2
1.3	Metrica	3
1.4	Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon	5
1.5	Quantizzazione del campo di Klein-Gordon	6
1.5.1	Quantizzazione a volume finito	10
1.5.2	Somma sugli impulsi discreti	11
1.6	Stati di Particelle	12
1.7	Il Teorema Della Noether	13
1.7.1	Invarianza per Traslazioni Spazio-Temporali	14
1.7.2	Invarianza per Trasformazioni di Lorentz Proprie	17
1.8	Propagatore del campo di Klein-Gordon	20
1.9	Microcausalità	24
1.9.1	Principio di microcausalità	25
1.9.2	Prodotto normale	27
1.10	Il Campo Di Klein-Gordon Non Hermitiano	28
1.10.1	Energia del campo di Klein-Gordon complesso	29
1.10.2	Carica del campo di Klein-Gordon complesso	30
2	Il Campo Elettromagnetico	33
2.1	Breve Ripasso dell'elettromagnetismo	33
2.2	Covarianza Relativistica dell'elettromagnetismo	34
2.3	Il Campo Elettromagnetico Libero	36
2.3.1	Gauge di Coulomb	36
2.3.2	Soluzione Classica	37
2.3.3	Teoria Lagrangiana del Campo Elettromagnetico Libero	38
2.4	Quantizzazione del Campo Elettromagnetico Libero	39
2.5	Quantità Conservate	40
2.5.1	Traslazioni	41
2.5.2	Rotazioni	42
2.6	Campo elettromagnetico trasportato dai fotoni	43

3	Il Campo Di Dirac	45
3.1	L'equazione di Dirac	45
3.2	Covarianza dell'equazione di Dirac	47
3.2.1	Covarianti Bilineari	50
3.2.2	Prodotto Scalare per l'Equazione di Dirac	52
3.3	Soluzioni dell'equazione di Dirac	52
3.3.1	Relazione di Completezza e Proiettori	57
3.4	Limite non Relativistico dell'Equazione di Dirac	58
3.5	Quantizzazione dell'equazione di Dirac	63
3.5.1	Primi Tentativi di Quantizzazione	63
3.5.2	Oscillatore di Fermi e Regole di Anticommutazione	65
3.5.3	Antisimmetria della Funzione d'onda	66
3.5.4	Calcolo dell'Impulso	67
3.6	Momento Angolare del Campo di Dirac	68
3.7	Il Propagatore del Campo di Dirac	69
3.8	Corrente Conservata per il Campo di Dirac	73
3.9	Parità	73
4	Teoria Delle Interazioni: QED	75
4.1	Schema di Interazione	76
4.2	Teoria Perturbativa	77
4.3	Calcolo dell'Hamiltoniana di Interazione	79
4.4	Il Teorema di Wick	82
4.5	Il Propagatore del Fotone	83
5	Processi Elementari in Elettrodinamica Quantistica	91
5.1	Scattering di e^- su un Nucleo Atomico	91
5.1.1	Calcolo Trasformata di Fourier del Potenziale Coulombiano	95
5.1.2	Polarizzazioni	95
5.2	Scattering $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	97
5.2.1	Polarizzazioni	102
5.3	Processi del primo ordine	104
5.4	Diagrammi di Feynman	104
5.4.1	Scrittura del termine cinematico	106
5.4.2	Scrittura dell'ampiezza di Feynman	107
5.5	Effetto Compton	107
5.5.1	Somma sulle polarizzazioni	108
6	Teoria del Neutrino	111
6.1	Le equazioni di Weyl	111
6.2	Particelle <i>right</i> e <i>left-handed</i>	112
6.3	Connessioni con Dirac	113
6.4	Rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz	114
6.4.1	Trasformazioni di Lorentz proprie	114
6.4.2	Parità	115
6.5	Il neutrino di Weyl	115

6.6	Corrente Conservata	117
-----	-------------------------------	-----

Capitolo 1

L'equazione di Klein-Gordon

Nella teoria della relatività, la ben nota equazione $E = mc^2$ stabilisce l'equivalenza tra massa ed energia, in virtù della quale il numero di particelle di un sistema non può quindi essere fissato a priori. Se si vuole, pertanto, che la teoria della meccanica quantistica sia compatibile anche con la teoria della relatività, occorre allora abbandonare il concetto di *funzione d'onda di una particella* presente in meccanica quantistica non relativistica. Nella meccanica quantistica non relativistica si definisce la densità di probabilità che una particella sia in un punto dello spazio in un certo istante di tempo e l'equazione di continuità che lega la densità di probabilità alla corrente di probabilità; ciò conduce alla conservazione della probabilità che la particella si trovi *sempre* in qualche punto dello spazio. Se vogliamo costruire, invece, una teoria coerente con la relatività, segue che tale conservazione non ha più senso perchè, come detto, il numero delle particelle di un sistema in relatività non è fissato e dunque non ha più senso dire che la particella si trova con certezza sempre in qualche punto dello spazio. Inoltre, dalla nota relazione di dispersione relativistica data da $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ discendono, come vedremo, gli stati di energia negativa che creano il problema dell'illimitatezza inferiore dell'energia e rendono quindi inconsistente una teoria basata sul concetto di funzione d'onda di singola particella. Nella meccanica quantistica relativistica, dunque, le equazioni non avranno più come soluzione una funzione d'onda di particelle nel senso della meccanica quantistica non relativistica, bensì avranno come soluzione quello che viene chiamato *campo*, che, come vedremo, è un oggetto matematico capace di creare o distruggere particelle. Le equazioni verranno denominate *equazioni di campo* e poichè un campo, in analogia con quello elettromagnetico, è un oggetto definito in ogni punto dello spazio, il passaggio dalla meccanica quantistica non relativistica a quella relativistica comporta anche un passaggio da una teoria con un numero finito ad una teoria con un numero infinito di gradi di libertà. La differenza tra meccanica quantistica non relativistica e quella relativistica sta, quindi, nei gradi di libertà diversi che intervengono. Nel passare ad equazioni relativisticamente covarianti, dobbiamo preservare la linearità affinchè rimanga valido il principio di sovrapposizione.

1.1 Dall'equazione di Schrödinger all'equazione di Klein-Gordon

Possiamo pensare che una possibile equazione relativistica sia ottenibile dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$H\Phi(x) = i\hbar \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} \quad (1.1)$$

sostituendo l'espressione dell'energia relativistica

$$E = \sqrt{m^2 c^4 - \mathbf{p}^2 c^2} = \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2} \quad (1.2)$$

all'Hamiltoniana H

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2} \Phi(x). \quad (1.3)$$

Questa equazione è difficile da trattare. Non possiamo espanderla in serie perchè avremmo una equazione differenziale di ordine infinito. Possiamo pensare di iterare applicando l'operatore $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Notare che quando iteriamo abbiamo il rischio di introdurre delle soluzioni spurie. Otteniamo

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial t^2} = i\hbar \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} = (m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2) \Phi(x). \quad (1.4)$$

Scriviamo ora questa equazione in forma relativistica. Ponendo $ct = x^0$ abbiamo

$$-\frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^0{}^2} = \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \nabla^2 \right) \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0}, \quad (1.5)$$

che prende il nome di *equazione di Klein-Gordon*. Quest'equazione non ha più il problema della radice quadrata, ma è diventata di secondo ordine e richiede dunque le due condizioni iniziali $\Phi(0)$ e $\dot{\Phi}(0)$, la seconda delle quali è in contrasto con i principi della meccanica quantistica perchè tutte le informazioni relative allo stato di un sistema debbono essere contenute nel solo stato iniziale $\Phi(0)$. Si comincia ad intuire allora che la soluzione di tale equazione non potrà essere interpretata come una funzione d'onda nel senso della meccanica quantistica non relativistica.

1.2 Covarianza dell'equazione e paradosso di Klein

Per studiare il problema della covarianza dell'equazione di Klein-Gordon, dobbiamo scegliere preliminarmente come considerare la variazione della $\Phi(x)$ sotto cambiamento del sistema di riferimento. Il modo in cui la $\Phi(x)$ si modifica per un cambiamento del sistema di riferimento è legato allo spin della particella. Ricordiamo che nella meccanica quantistica non relativistica, se lo stato di una particella è invariante per rotazioni, la particella ha spin zero; se lo stato della particella si trasforma come uno spinore di Pauli segue che la particella ha spin 1/2. Il caso con cui abbiamo a che fare è semplice, in quanto $\Phi(x)$ è un campo scalare. Quindi se abbiamo due osservatori in sistemi di riferimento aventi coordinate x e x' connesse da una trasformazione di Lorentz $x' = \Lambda x$, segue che per un osservatore il valore del campo è $\Phi(x)$, mentre per l'altro è $\Phi'(x')$. Poichè però il campo è scalare per i principi relativistici deve assumere il medesimo valore per i due osservatori nello stesso punto fisico, pur parametrizzato da coordinate diverse

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \quad \text{con } x' = \Lambda x. \quad (1.6)$$

Studiare la covarianza di questa equazione significa che ognuno dei due campi $\Phi(x)$ e $\Phi'(x')$ è soluzione di un'equazione scritta rispetto ad un certo sistema di riferimento. I due osservatori quindi scriveranno l'equazione di Klein-Gordon

$$\begin{cases} \left(\square_x + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi(x) = 0 \\ \left(\square_{x'} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi'(x') = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ora il D'Alambertiano

$$\square_x = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \partial'_\rho \partial'_\sigma = g^{\rho\sigma} \partial'_\rho \partial'_\sigma = \square_{x'} \quad (1.8)$$

si trasforma come uno scalare (∂' è la derivata rispetto alle x'). Pertanto possiamo concludere che vale l'eguaglianza

$$\square_{x'} \Phi'(x') = \square_x \Phi(x) \quad (1.9)$$

e quindi che l'equazione di Klein-Gordon è covariante. D'ora in poi adotteremo le unità di misura dette *unità naturali*, che consistono nel porre i valori delle costanti universali $c = \hbar = 1$. Facciamo ora un primo accenno alle soluzioni. Poichè si tratta di una equazione libera, ci aspettiamo una soluzione di onda piana; applichiamo dunque l'operatore $\square + m^2$, denominato *operatore di Klein-Gordon*, alla funzione $Ae^{\pm ipx}$

$$(\square + m^2) Ae^{\pm ipx} = (-p^2 + m^2) Ae^{\pm ipx}, \quad (1.10)$$

il che mostra che la funzione $Ae^{\pm ipx}$ è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon se e solo se risulta (per $A \neq 0$)

$$p^2 = m^2 \implies p^0 = \pm (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}. \quad (1.11)$$

Otteniamo la possibilità di avere particelle libere con energie cinetiche minori di 0. In relatività abbiamo sempre la possibilità di avere energie cinetiche negative; tuttavia partendo da energie $E > 0$ durante l'evoluzione temporale si può solo restare a $E > 0$ perchè si dovrebbe passare per zone in cui non ci sono soluzioni (il moto è continuo); pertanto teniamo conto solo del segno positivo. Quantisticamente il moto è sempre continuo; tuttavia la teoria non esclude la possibilità di effettuare un salto quantico. Se la particella è libera, questa resterà confinata in una delle due falde dell'iperboloide; tuttavia quando introduciamo una interazione, questa può generare, tramite la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, una probabilità di transizione per unità di tempo non nulla tra stati ad energia positiva e negativa. Il problema deriva dal fatto che, una volta che siamo arrivati a $E < 0$, la particella inizia ad emettere energia (ad esempio sotto forma di radiazione), perdendo energia cinetica fino a $-\infty$, irradiando pertanto una energia infinita. Questo fatto è denominato *paradosso di Klein*.

1.3 Metrica

Quello che abbiamo fatto fino a questo momento è stato riprodurre l'equazione di Schrödinger per estenderla al caso relativistico; per poter interpretare la $\Phi(x)$ soluzione dell'equazione di Klein-Gordon come una funzione d'onda, occorre introdurre un prodotto scalare che permetta di calcolarne le norme. Il prodotto scalare è fondamentale per due motivi:

- in primo luogo la densità di probabilità è la norma quadrata della funzione d'onda;
- in secondo luogo l'hermitianità di un operatore A è definita tramite l'eguaglianza $(A\psi, \phi) = (\psi, A^\dagger \phi)$ di due prodotti scalari.

La metrica della meccanica quantistica non relativistica indotta dall'equazione di Schrödinger su due soluzioni ψ_1, ψ_2 è costruita in modo da risultare indipendente dal tempo. Conseguenza di

questo è che l'evoluzione temporale degli stati risulta realizzata tramite un operatore *unitario*. È importante che l'evoluzione sia unitaria in quanto la corrente di probabilità si conserva. Viceversa, dalla richiesta che l'evoluzione temporale degli stati sia ottenuta mediante un operatore unitario, discende che il prodotto scalare di due soluzioni dell'equazione di Schrödinger sia indipendente dal tempo. Il prodotto scalare indipendente dal tempo indotto dall'equazione di Schrödinger è ottenuto attraverso una *equazione di continuità*.

Utilizziamo ora lo stesso procedimento per costruire il prodotto scalare indipendente dal tempo indotto dall'equazione di Klein-Gordon per due sue soluzioni. Mentre nel prodotto scalare di due soluzioni dell'equazione di Schrödinger compaiono solo le funzioni d'onda e non anche le loro derivate temporali perchè l'equazione è del primo ordine in t e richiede pertanto, in virtù delle proprietà del problema di Cauchy, solo la conoscenza dello stato iniziale, nel prodotto scalare di due soluzioni di Klein-Gordon saranno presenti sia $\Phi(x)$ che $\dot{\Phi}(x)$ perchè l'equazione di Klein-Gordon è del secondo ordine in t e richiede dunque la conoscenza sia dello stato iniziale che della sua derivata prima temporale. Prendiamo ora il sistema

$$\begin{cases} (\square_x + m^2) \Phi_1 = 0 \\ (\square_{x'} + m^2) \Phi_2^* = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

e, proprio come in meccanica quantistica ordinaria, moltiplichiamo la prima equazione per Φ_2^* e la seconda per Φ_1 e sottraiamole membro a membro

$$\Phi_2^* \square \Phi_1 - \Phi_1 \square \Phi_2^* = 0. \quad (1.13)$$

Questa equazione è riscrivibile nella forma

$$\partial_\mu (\Phi_2^* \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1 \partial^\mu \Phi_2^*) = 0. \quad (1.14)$$

Definendo la quadricorrente J^μ ponendo

$$J^\mu = i (\Phi_2^* \partial^\mu \Phi_1 - \Phi_1 \partial^\mu \Phi_2^*) \equiv i \Phi_2^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \Phi_1 \quad (1.15)$$

con il fattore i che la rende reale quando $\Phi_1 = \Phi_2$ (nota che il secondo addendo della corrente è il complesso coniugato del primo), abbiamo l'*equazione di conservazione* $\partial_\mu J^\mu = 0$. Integrando in $d\mathbf{x}$ questa equazione e usando il teorema della divergenza, otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int J^0 d\mathbf{x} = i \frac{d}{dt} \int \Phi_2^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 \Phi_1 d\mathbf{x} = 0. \quad (1.16)$$

Questa equazione definisce, pertanto, il prodotto scalare indipendente dal tempo indotto dall'equazione di Klein-Gordon

$$(\Phi_2, \Phi_1) = i \int d\mathbf{x} (\Phi_2^* \dot{\Phi}_1 - \Phi_1 \dot{\Phi}_2^*) = i \int d\mathbf{x} \Phi_2^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 \Phi_1 \quad (1.17)$$

Questa metrica non dà luogo ad una norma definita positiva perchè $\|\Phi\| = (\Phi, \Phi)$ può essere negativa per funzioni Φ complesse, mentre addirittura si ha norma nulla $\|\Phi\| = (\Phi, \Phi) = 0$ per ogni funzione Φ reale. Notare che il fattore i introdotto nella corrente conservata mantiene il prodotto scalare reale.

1.4 Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon

Oltre al problema della norma non definita positiva, l'equazione di Klein-Gordon presenta il ben noto problema che essa genera stati aventi autovalori dell'energia negativi. Tali stati non possono essere trascurati per diversi motivi. In primo luogo perchè se nella soluzione dell'equazione di Klein-Gordon considerassimo solo gli autostati di energia positiva, sorgerebbero delle transizioni agli stati ad energia negativa nel caso di interazione. In questo modo, come accennavamo in precedenza, *mancherebbe lo stato fondamentale* perchè la particella continuerebbe ad emettere radiazione diminuendo la sua energia fino a $-\infty$. In secondo luogo gli autostati di un operatore hermitiano costituiscono una base ortonormale completa la quale perderebbe la sua completezza se si trascurassero alcuni autostati.

L'insieme delle energie negative potrebbe anche non essere un problema, come accade, ad esempio, per l'atomo di idrogeno; ma nel caso dell'equazione di Klein-Gordon il problema è che compaiono energie negative che formano uno spettro illimitato inferiormente. Poichè l'equazione di Klein-Gordon genera stati ad energia negativa e soluzioni a norma negativa, ovvero presenta delle incompatibilità con la teoria degli spazi di Hilbert, essa *non* può più essere interpretata come un'equazione d'onda che descrive la dinamica di una particella e le sue soluzioni non possono più essere interpretate come funzioni d'onda della particella stessa nel senso della meccanica quantistica non relativistica. Poichè però tale equazione ha, come si è visto, delle buone proprietà relativistiche come la covarianza, potremo utilizzare quest'equazione ugualmente, purchè si cambi la sua interpretazione fisica. In analogia con le equazioni delle onde per i potenziali scalare e vettore, interpretiamo l'equazione di Klein-Gordon come un'equazione avente per soluzione un'*osservabile* classica.

L'apparato della meccanica quantistica costituito da operatori hermitiani, principio di sovrapposizione, regole di commutazione e così via, rimane inalterato, ma nel caso della meccanica quantistica relativistica viene riferito ai *campi* e non più alle particelle (in questo caso abbiamo a che fare con un campo scalare ovvero di una applicazione che associa ad ogni punto dello spazio uno scalare). Ponendo dunque

$$\omega_{\mathbf{p}} = p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (1.18)$$

gli esponenti dei due esponenziali delle onde piane vengono scritti secondo la convenzione secondo cui quando cambiamo segno all'energia, lo cambiamo anche all'impulso spaziale. In tal modo avremo per le energie positive $e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = e^{-ipx}$ e per le energie negative $e^{-i(-Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = e^{ipx}$. Scriviamo dunque le due soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon separatamente

$$f_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) = Ae^{-ipx} \quad \text{e} \quad f_{\mathbf{p}}^{(-)}(x) = Ae^{ipx} \quad (1.19)$$

per le energie rispettivamente positive e negative, dove i coefficienti sono stati presi uguali perchè, come si vedrà a breve, tali risulteranno. Per normalizzare le funzioni $f_{\mathbf{p}}^{(+)}(x)$ e $f_{\mathbf{p}}^{(-)}(x)$ imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} (f_{\mathbf{p}'}^{(+)}, f_{\mathbf{p}}^{(+)}) = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ (f_{\mathbf{p}'}^{(-)}, f_{\mathbf{p}}^{(-)}) = -\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \end{cases} \quad (1.20)$$

Calcoliamo il primo prodotto scalare

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{p}}^{(+)}, f_{\mathbf{p}'}^{(+)}) &= iA_{\mathbf{p}'}^* A_{\mathbf{p}} \int d\mathbf{x} e^{ip'x} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 e^{-ipx} = iA_{\mathbf{p}'}^* A_{\mathbf{p}} \int d\mathbf{x} \left[e^{ip'_0 x^0} e^{-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 e^{-ip_0 x^0} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= i|A_{\mathbf{p}}|^2 (2\pi)^3 \left[e^{ip_0 x^0} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 e^{-ip_0 x^0} \right] \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = 2|A_{\mathbf{p}}|^2 (2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Effettuando il calcolo completamente analogo per $f_{\mathbf{p}}^{(-)}$ si ottiene

$$\begin{cases} f_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \\ f_{\mathbf{p}}^{(-)}(x) = \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Inoltre si può verificare che

$$(f_{\mathbf{p}}^{(+)}, f_{\mathbf{p}'}^{(-)}) = 0, \quad (1.23)$$

ovvero le soluzioni ad energia positiva e negativa sono ortonormali tra di loro e formano una base ortonormale completa nello spazio di Hilbert. Le soluzioni con energia positiva hanno norma positiva, mentre quelle con energia negativa hanno norma negativa. Nel caso classico la soluzione generale dell'equazione di Klein-Gordon è la funzione

$$\Phi(x) = \int d\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\alpha(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \beta^*(\mathbf{p}) e^{ipx} \right), \quad (1.24)$$

dove $\alpha(\mathbf{p})$ e $\beta(\mathbf{p})$ sono coefficienti numerici fissati dalle condizioni iniziali; notare che se il campo Φ è reale allora $\beta = \alpha$.

1.5 Quantizzazione del campo di Klein-Gordon

Per considerare l'equazione di Klein-Gordon come un'equazione quantistica, dobbiamo interpretare la sua soluzione $\Phi(x)$ non più come una osservabile classica come in (1.24), bensì come un *operatore di campo*. Non ci preoccupiamo per il momento del modo in cui misurare un campo osservabile, ricordando in ogni caso che la misurabilità di un campo dipende dalla sua interazione con gli strumenti di misura. La soluzione generale dell'equazione di Klein-Gordon considerata a questo punto come un'equazione quantistica, è quindi l'*operatore*

$$\Phi(x) = \int d\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) \quad (1.25)$$

dato dalla combinazione lineare delle due soluzioni di base; i due coefficienti $a(\mathbf{p})$ e $a^\dagger(\mathbf{p})$ sono due *operatori* i quali, affinché l'operatore $\Phi(x)$ sia reale, debbono essere presi uno hermitiano coniugato dell'altro.

Per quantizzare il campo $\Phi(x)$ di Klein-Gordon, procediamo in analogia con il caso classico partendo da una lagrangiana e imponendo le condizioni di quantizzazione canonica sulle $\Phi(x)$ e sulle $\dot{\Phi}(x)$. Consideriamo ora la *densità di Lagrangiana*

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2 \right)}, \quad (1.26)$$

e la corrispondente azione

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2 \right). \quad (1.27)$$

Variamo ora l'azione rispetto al campo $\Phi(x)$

$$\delta S = \int d^4x \left(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \delta \Phi - m^2 \Phi \delta \Phi \right) = - \int d^4x \left(\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi \right) \delta \Phi = 0 \quad (1.28)$$

dove abbiamo utilizzato una integrazione per parti $\partial_\mu \partial^\mu \delta \Phi = \partial^\mu (\partial_\mu \Phi \delta \Phi) - (\partial_\mu \partial^\mu \Phi) \delta \Phi$ e il teorema della divergenza quadridimensionale. Il teorema della divergenza che è un teorema *topologico* (ovvero non dipende dalla metrica che stiamo usando) va ad annullare il termine $\partial^\mu (\partial_\mu \Phi \delta \Phi)$ dell'integrazione per parti, in quanto le funzioni $\Phi(x)$ tendono a zero all'infinito (e pertanto tendono a zero anche le rispettive variazioni).

Poichè si potrebbe dimostrare che l'integrando $\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi$ è continuo, segue che vale il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni: otteniamo che, affinchè la variazione δS sia nulla per ogni variazione arbitraria $\delta \Phi$, deve valere l'uguaglianza $\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0$, cioè la Φ che rende stazionaria l'azione è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon.

Nel calcolare ora gli impulsi coniugati attraverso le derivate della densità di lagrangiana rispetto ai campi, si pone il problema che i gradi di libertà del sistema in esame sono infiniti. Sebbene la procedura di quantizzazione condotta fin qui sia stata del tutto analoga alla formulazione classica, tuttavia $\Phi(x)$ è un parametro continuo che ci impone di applicare quello che si chiama un *processo di discretizzazione*. Sfruttiamo allora un'analogia con la trattazione del campo elettromagnetico che non viene mai misurato esattamente nel punto $\mathbf{x}$, ma viene calcolato mediante la sua media in una regione finita intorno al punto $\mathbf{x}$. Questa strategia rappresenta una sorta di discretizzazione. Indotti da questo modo di procedere adottato per il campo elettromagnetico, discretizziamo allora lo spazio-tempo in *cellette* di volume V_i e definiamo lo stato del sistema come media su una celletta, ovvero

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Phi_i(t) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.29)$$

Con questa approssimazione si ha che la derivata *spaziale* del campo è data dal limite

$$\partial_k \Phi(\mathbf{x}, t) = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(t) - \Phi_{i-1}(t)}{\Delta L}, \quad (1.30)$$

dove L è il passo reticolare. Se con questa approssimazione riferiamo il campo $\Phi(\mathbf{x}, t)$ alle cellette discrete indicizzate con i , possiamo sostituire la dipendenza della variabile continua $\mathbf{x}$ con un indice discreto scrivendo dunque $\Phi_i(t)$. L'azione, pertanto diventa

$$S = \frac{1}{2} \int dt \left(\sum_i \dot{\Phi}_i^2 V_i + F(\mathbf{x}) \right), \quad (1.31)$$

dove $F(\mathbf{x})$ è un'espressione indipendente da t , contenente solo coordinate e derivate spaziali (tutto il rimanente dell'azione). Si ha quindi che la lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{1}{2} \left[\sum_i \dot{\Phi}_i^2 V_i + F(\mathbf{x}) \right], \quad (1.32)$$

da cui segue

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} = \dot{\Phi}_i V_i = \pi_i V_i. \quad (1.33)$$

Da questa equazione si deduce che la quantità $\Phi_i(x) = \pi_i(x)$ rappresenta la *densità di impulso coniugato*. Come si può osservare, abbiamo ottenuto che i campi Φ e $\dot{\Phi}$ corrispondono alle variabili lagrangiane q e p , mentre la variabile continua non numerabile x corrisponde all'indice discreto e finito i delle q_i e p_i . In questo senso dunque il passaggio dalla meccanica quantistica non relativistica a quella relativistica corrisponde ad un passaggio da una teoria ad un numero finito di gradi di libertà ad una teoria ad un numero *infinito* di gradi di libertà. Poichè gli operatori della meccanica quantistica relativistica *dipendono dal tempo*, segue che la rappresentazione più comoda in cui studiare i sistemi della meccanica quantistica relativistica è quella di *Heisenberg*

$$|\alpha\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} |\alpha\rangle_S, \quad A_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} A_S e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (1.34)$$

con $A_H(t)$ generico operatore nello schema di Heisenberg. Infatti nello schema di Schrödinger le osservabili risultano indipendenti dal tempo e non si saprebbe come trattare quelle osservabili che sono gli operatori di campo dipendenti dal tempo della meccanica quantistica relativistica. Poichè dunque nello schema di Heisenberg le osservabili dipendono dal tempo, segue che tale rappresentazione risulta più comoda perchè gli operatori di campo dipendenti dal tempo possono essere trattati con i medesimi metodi con cui, nello stesso schema di Heisenberg, sono trattate le osservabili della meccanica quantistica non relativistica.

A questo punto, dal momento che lo spazio-tempo è discretizzato e la lagrangiana descrive un sistema ad un numero finito di gradi di libertà, possiamo imporre, nella rappresentazione di Heisenberg, le condizioni di quantizzazione come si effettua nella meccanica quantistica non relativistica. Per stabilire quali condizioni di quantizzazione imporre sui campi, interpretiamo le quantità $a(\mathbf{p})$ e $a^\dagger(\mathbf{p})$ come degli operatori di *distruzione* e *creazione* di una particella. Imponiamo a questo riguardo delle regole di commutazione per i campi nello schema di Heisenberg

$$\begin{cases} [\Phi_i(t), \Phi_j(t)] = 0 \\ [p_i(t), p_j(t)] = 0 \\ [p_i(t), \Phi_j(t)] = -i \delta_{ij} \end{cases} \quad (1.35)$$

prese a tempi uguali perchè tali regole valgono già al tempo zero nella rappresentazione di Schrödinger e quindi l'evoluzione naturale del sistema le mantiene valide a qualsiasi istante di tempo successivo. Il commutatore $[\pi_i(t), \Phi_j(t)]$ di variabili coniugate riferite a cellette distinte risulta nullo in analogia con il caso in cui le variabili coniugate canoniche siano riferite a gradi di libertà diversi.

Per ritrovare il formalismo del continuo, si esegue il limite per il volume V_i delle cellette che tende a zero, ovvero

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \lim_{V_i \rightarrow \mathbf{x}} \Phi_i(t) = \lim_{V_i \rightarrow \mathbf{x}} \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1.36)$$

in modo che le cellette riproducano il continuo dei punti $\mathbf{x}$. Quindi per quantizzare il campo continuo Φ ci siamo avvalsi della seguente procedura: siamo passati alla trattazione in uno spazio-tempo discreto per utilizzare delle regole di quantizzazione costruite in analogia con il caso classico ad un numero finito di gradi di libertà, ma ora, mediante il limite $V_i \rightarrow \mathbf{x}$ torniamo di nuovo alla trattazione nello spazio-tempo continuo. Eseguendo il limite le regole di commutazione canonica assumono la forma, a tempi uguali

$$\begin{cases} [\Phi(\mathbf{x}, x^0), \Phi(\mathbf{y}, x^0)] = 0 \\ [\dot{\Phi}(\mathbf{x}, x^0), \dot{\Phi}(\mathbf{y}, x^0)] = [\pi(\mathbf{x}, x^0), \pi(\mathbf{y}, x^0)] = 0 \\ [\dot{\Phi}(\mathbf{x}, x^0), \Phi(\mathbf{y}, x^0)] = [\pi(\mathbf{x}, x^0), \Phi(\mathbf{y}, x^0)] = -i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{cases} \quad (1.37)$$

Osserviamo che due eventi $(x^0, \mathbf{x})$ e $(y^0, \mathbf{y})$ con $x^0 = y^0$ sono un caso particolare di coppia di eventi con distanza del genere *spazio* e quindi possiamo dire che i commutatori canonici sono riferiti solo a valori del campo calcolati in quei casi particolari di eventi i quali non hanno distanza del genere spazio, ma siano inoltre anche simultanei. Vedremo più avanti, quando parleremo della *microcausalità*, che se il commutatore di due valori del campo calcolati a tempi uguali è nullo, sarà sempre nullo anche il commutatore di due valori del campo calcolati, più in generale, in qualsiasi coppia di eventi con distanza di tipo spazio. Nulla invece possiamo dire riguardo il commutatore di due valori del campo calcolati in eventi di tipo tempo.

A questo punto, a partire dalle regole di commutazione (1.37) relative al campo $\Phi(x)$, vorremmo determinare le regole di commutazione degli operatori a e $a^\dagger$ di cui $\Phi(x)$ è combinazione lineare. Poichè le $f_{\mathbf{p}}^{(+)}(x)$ e $f_{\mathbf{p}}^{(-)}(x)$ formano una base ortonormale dello spazio, in analogia con il procedimento per i vettori in algebra lineare, calcoliamo

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{p}}^{(+)}, \Phi) &= \left(f_{\mathbf{p}}^{(+)}, \int [a(\mathbf{p}') f_{\mathbf{p}'}^{(+)}(x) + a^\dagger(\mathbf{p}') f_{\mathbf{p}'}^{(-)}(x)] d\mathbf{p}' \right) = \int a(\mathbf{p}') (f_{\mathbf{p}}^{(+)}, f_{\mathbf{p}'}^{(+)}) d\mathbf{p}' \\ &= \int a(\mathbf{p}') \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d\mathbf{p}' = a(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} (f_{\mathbf{p}}^{(-)}, \Phi) &= \left(f_{\mathbf{p}}^{(-)}, \int [a(\mathbf{p}') f_{\mathbf{p}'}^{(+)}(x) + a^\dagger(\mathbf{p}') f_{\mathbf{p}'}^{(-)}(x)] d\mathbf{p}' \right) = \int a^\dagger(\mathbf{p}') (f_{\mathbf{p}}^{(-)}, f_{\mathbf{p}'}^{(-)}) d\mathbf{p}' \\ &= - \int a^\dagger(\mathbf{p}') \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d\mathbf{p}' = -a^\dagger(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Tramite queste relazioni, utilizzando la definizione del prodotto scalare di Klein-Gordon, possiamo ottenere le regole di commutazione per gli operatori $a(\mathbf{p})$ e $a^\dagger(\mathbf{p})$

$$\begin{cases} [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 0 \\ [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Abbiamo così ritrovato la struttura dei commutatori dell'oscillatore armonico. Per l'equazione di Klein-Gordon dunque abbiamo ottenuto che dalle regole di quantizzazione relative ai campi si passa alle regole di quantizzazione degli operatori $a(\mathbf{p})$ e $a^\dagger(\mathbf{p})$ (e viceversa). Questa perfetta corrispondenza discende dal fatto che il campo di Klein-Gordon possiede il momento coniugato del campo e, di conseguenza, il formalismo canonico hamiltoniano (cosa non ovvia come si vedrà nei capitoli seguenti).

Ora possiamo determinare l'*Hamiltoniana di Klein-Gordon*, associata alla lagrangiana di Klein-Gordon

$$\begin{aligned} H = \sum_i p_i \dot{\Phi}_i - L = \sum_i V_i \dot{\Phi}_i^2 - L = \int d\mathbf{x} \left(\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} \partial_i \Phi \partial^i \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right) \\ = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left(\dot{\Phi}^2 - |\nabla \Phi|^2 + m^2 \Phi^2 \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Osserviamo quindi che l'energia è una forma quadratica, possiamo interpretarla come l'energia di tanti oscillatori armonici che vibrano uno per ogni punto. Ora sostituendo nella precedente

equazione la soluzione Φ dell'equazione di Klein-Gordon abbiamo

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} \, \omega_{\mathbf{p}} \left(a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) \right). \quad (1.42)$$

Questa equazione è riscrivibile nella forma

$$H = \int d\mathbf{p} \, \omega_{\mathbf{p}} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \delta(0) \int d\mathbf{p} \, \omega_{\mathbf{p}}, \quad (1.43)$$

dove l'ultimo termine è infinito. Ma poichè l'energia di un sistema è definita a meno di una costante additiva, possiamo ridefinirla sottraendo il termine infinito e scrivendo

$$H = \int d\mathbf{p} \, \omega_{\mathbf{p}} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}). \quad (1.44)$$

1.5.1 Quantizzazione a volume finito

Consideriamo ora lo spazio-tempo come un cubo finito di volume V e lato L tale che valga la relazione di periodicità

$$\Phi(x, y, z, x^0) = \Phi(x + L, y, z, x^0). \quad (1.45)$$

Questa condizione è ben definita in quanto mantiene l'operatore impulso $p = -i \frac{d}{dx}$ autoaggiunto

$$(\Phi_1, p \Phi_2) = -i \int_0^L \Phi_2^* \frac{d}{dx} \Phi_1 dx = -i \left[\Phi_2^* \Phi_1 \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d\Phi_2^*}{dx} \Phi_1 dx \right] = -i \int_0^L \left(\frac{d\Phi_2}{dx} \right)^* \Phi_1 dx = (p \Phi_1, \Phi_2).$$

Ora notando che $-i \frac{d}{dx} e^{ipx} = -i \frac{d}{dx} e^{ip(x+L)} = p e^{ipx}$ abbiamo che

$$e^{ipx} = e^{ip(x+L)} \implies p = \frac{2\pi}{L} n, \quad (1.46)$$

che, estesa al caso tridimensionale diventa

$$\mathbf{p} = \frac{(2\pi)^3}{V} \mathbf{n} \quad (1.47)$$

dove $\mathbf{n}$ è un vettore di numeri interi (n_x, n_y, n_z) . Imponiamo ora la normalizzazione delle soluzioni ad energia positiva a $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$

$$(f_{\mathbf{p}}^{(+)}, f_{\mathbf{p}'}^{(+)}) = 2\omega_{\mathbf{p}} |A_{\mathbf{p}}|^2 V \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (1.48)$$

e analogamente per la normalizzazione a $-\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ per le soluzioni ad energia negativa. Otteniamo pertanto

$$\begin{cases} f_{\mathbf{p}}^{(+)}(x) = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \\ f_{\mathbf{p}}^{(-)}(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \end{cases} \quad (1.49)$$

in modo tale che la regola di commutazione per gli operatori di creazione e distruzione assuma la forma

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (1.50)$$

e l'operatore $\Phi(x)$, riferito allo spazio tempo discreto, sia dato dall'espressione

$$\Phi(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx} \right). \quad (1.51)$$

L'Hamiltoniana di Klein-Gordon nel caso di spazio-tempo discreto si scrive

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \right), \quad (1.52)$$

ovvero, sottraendo il termine infinito come nel caso continuo

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}. \quad (1.53)$$

Per non appesantire eccessivamente la scrittura, la dipendenza da un impulso continuo $\mathbf{p}$ potrà essere indicata talvolta con un indice $\mathbf{p}$ in basso (come nel caso discreto) e non come variabile tra parentesi tonde.

1.5.2 Somma sugli impulsi discreti

Quello che vogliamo fare ora è determinare il legame tra gli operatori di creazione e distruzione nel caso discreto e continuo. Per questi scopi è utile calcolarsi preliminarmente, per una certa funzione $f(\mathbf{p})$ l'espressione

$$\sum_{\{\mathbf{n}\}} f(\mathbf{p}). \quad (1.54)$$

In 3 dimensioni, la densità degli stati, ovvero il numero di valori di $\mathbf{p}$ che cadono all'interno di un volumetto Δp sarà

$$\Delta n = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z. \quad (1.55)$$

Otteniamo quindi

$$\sum_{\{\mathbf{n}\}} f(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_i f(\mathbf{p}_i) \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z, \quad (1.56)$$

dove abbiamo sostituito la somma su $\{\mathbf{n}\}$ con la somma sulle cellette i . A questo punto per $V \rightarrow \infty$, si ha il passaggio a limite (detto *limite termodinamico*)

$$\frac{1}{V} \sum_{\{\mathbf{n}\}} f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}), \quad (1.57)$$

esprimibile in modo simbolico con la scrittura

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{\{\mathbf{p}_n\}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}. \quad (1.58)$$

Ora possiamo evidenziare il legame tra gli operatori di creazione e distruzione discreti e continui

$$\Phi(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx} \right) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{V} \left(a_{\mathbf{p}} \frac{\sqrt{V} e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \frac{\sqrt{V} e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right), \quad (1.59)$$

che, per $V \rightarrow \infty$, tende al limite continuo

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int \frac{1}{(2\pi)^3} \left(a_{\mathbf{p}} \frac{\sqrt{V} e^{-ipx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \frac{\sqrt{V} e^{ipx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right) \\ &= \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx} \right),\end{aligned}\quad (1.60)$$

che, per confronto con la soluzione di Klein-Gordon continua, fornisce le relazioni

$$a(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_{\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad a^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}. \quad (1.61)$$

1.6 Stati di Particelle

Dalla regola di commutazione (1.50) si ottiene la medesima struttura degli stati dell'oscillatore armonico, ma in realtà lo spazio degli stati, denominato *spazio di Fock*, è più complicato perchè gli stati, in meccanica quantistica relativistica, possono avere più di una particella.

Lo *stato di vuoto*, indicato con $|0\rangle$, è definito in modo tale che, come si dice, sia *annichilato* dall'operatore $a_{\mathbf{p}}$, ovvero $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$. Possiamo osservare quindi che con la sottrazione dei termini infiniti, l'energia dello stato di vuoto, detta *energia di punto zero*, relativa al sistema di Klein-Gordon è zero, come si riconosce immediatamente applicando l'hamiltoniana continua data dalla (1.42) e l'hamiltoniana discreta data dalle (1.52), scritte in termini degli operatori $a, a^{\dagger}$. Abbiamo poi che l'operatore $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ crea, agendo sul vuoto, stati eccitati di energia, ovvero autostati dell'hamiltoniana di Klein-Gordon. Con ovvio significato della terminologia, denominiamo allora l'operatore $a_{\mathbf{p}}$ *operatore di distruzione* e l'operatore $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ *operatore di creazione* di particelle. Nello spazio degli stati abbiamo dunque il vuoto, indicato con $|0\rangle$, poi lo stato con una particella avente impulso spaziale $\mathbf{p}$ ed energia relativistica $E_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, indicato con $|\mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle$, poi ancora lo stato con due particelle aventi impulsi spaziali $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ ed energia pari alla somma delle due energie, indicato con $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger}|0\rangle$ e così via.

Calcolando i relativi autovalori, verifichiamo, a titolo di esempio che gli stati $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle$ e $a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger}|0\rangle$ sono effettivamente autostati di H con energia rispettivamente $\omega_{\mathbf{p}}$ e $\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2}$. Sviluppando il tutto con il formalismo discreto otteniamo

$$H(a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}]|0\rangle = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad (1.62)$$

e analogamente

$$H(a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger}|0\rangle) = (\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2}) a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger}|0\rangle, \quad (1.63)$$

e così via per induzione. Un generico stato $|f\rangle$ con una sola particella viene espresso come combinazione lineare dei vettori di base del sottospazio degli stati ad una particella, ovvero

$$|f\rangle = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{\dagger}|0\rangle \quad (1.64)$$

e la probabilità di avere in una misura di impulso spaziale esattamente il valore $\mathbf{k}$ è data dal modulo quadro della proiezione

$$\langle \mathbf{k} | f \rangle = f(\mathbf{k}) \quad (1.65)$$

e quindi $|f(\mathbf{p})|^2$ rappresenta proprio la probabilità di ottenere il valore $\mathbf{p}$ in una misura di impulso spaziale, come nella meccanica quantistica non relativistica; in altre parole $f(p)$ coincide con la funzione d'onda nello spazio degli impulsi della meccanica quantistica non relativistica.

La normalizzazione degli stati è data dall'usuale relazione

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0 \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (1.66)$$

Se gli stati della base $|\mathbf{p}\rangle$ sono normalizzati, segue che la normalizzazione di tutti gli stati $|f\rangle$ è data da

$$\langle f | f \rangle = \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' f^*(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}') \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger | 0 \rangle = \int d\mathbf{p} |f(\mathbf{p})|^2 = 1 , \quad (1.67)$$

ovvero la normalizzazione di un ket nel formalismo di *seconda quantizzazione* coincide con la nota normalizzazione della funzione d'onda di prima quantizzazione associata al ket.

Analogamente, un generico stato $|f\rangle$ con due particelle sarà espresso nella forma

$$|f\rangle = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle \quad (1.68)$$

In virtù della regola di commutazione $[a_{\mathbf{p}_1}^\dagger, a_{\mathbf{p}_2}^\dagger] = 0$ abbiamo che nella precedente relazione la funzione $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ risulta *simmetrica* perchè la sua parte antisimmetrica contenuta nella scrittura

$$f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2} [f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)] + \frac{1}{2} [f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)] \quad (1.69)$$

non dà contributo quando viene moltiplicata per l'operatore simmetrico $a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger$. Quindi nello stato con due particelle, la funzione d'onda è sempre *simmetrica* sotto scambio delle due particelle. Abbiamo quindi a che fare con dei *bosoni*. Dimosteremo successivamente che queste particelle hanno spin 0.

1.7 Il Teorema Della Noether

Un gruppo di trasformazioni delle coordinate spazio-temporali o anche dei campi prende il nome di *gruppo di trasformazioni ad n parametri* se ogni trasformazione dipende da n parametri. Un gruppo di trasformazioni ad n parametri si dice *gruppo di simmetria ad n parametri* se per ogni generica trasformazione del gruppo, la dinamica per tutti i campi trasformati rimane invariata, ovvero se i campi continuano a soddisfare le medesime equazioni del moto. La grande importanza che rivestono le simmetrie in fisica sta nel fatto che da esse si possono ricavare delle proprietà del sistema anche senza risolvere esplicitamente le equazioni del moto, che generalmente possono risultare complicate. Poichè la dinamica è data dalle derivate della lagrangiana rispetto ai campi, concludiamo che affinché la dinamica per tutti i campi rimanga invariata, la lagrangiana, che per definizione è uno scalare, non deve essere solo *invariante in valore* (scalare invariante), ma deve mantenere anche la *stessa forma funzionale* quando compaiono i campi trasformati. L'invarianza *in forma* della lagrangiana è data dall'uguaglianza

$$\mathcal{L}'(\phi'(x'), \alpha) = \mathcal{L}(\phi'(x'), \alpha) , \quad (1.70)$$

mentre l'uguaglianza *in valore* è data dall'uguaglianza

$$\mathcal{L}'(\phi'(x'), \alpha) = \mathcal{L}(\phi(x), \alpha) , \quad (1.71)$$

dove α rappresenta l'insieme dei parametri che esprimono l'entità della trasformazione. Se il parametro α è un parametro continuo (cioè reale), allora il gruppo di simmetria si dice *gruppo di simmetria continuo*. Per i gruppi (non solo di simmetria) continui si possono definire le trasformazioni infinitesime che sono quelle che possono essere prese infinitamente vicine all'identità. Una trasformazione finita si ottiene dunque applicando infinite volte la corrispondente trasformazione infinitesima. Sono un esempio di gruppo di trasformazioni continuo il gruppo delle traslazioni spazio-temporali e delle rotazioni spaziali; non è invece una trasformazione continua la trasformazione di parità spaziale perchè essa inverte l'orientazione degli assi e non ha senso la trasformazione infinitesima infinitamente vicina all'identità.

Le simmetrie sotto trasformazioni delle coordinate spazio-temporali possono essere denominate *simmetrie geometriche* o *simmetrie spazio-temporali*. Un sistema può avere anche un altro tipo di simmetria, denominata *simmetria interna*, che è un'invarianza della lagrangiana sotto trasformazioni dei soli campi in un dato punto x , ovvero senza variazione del punto nello spazio.

Vediamo ora il teorema della Noether che si applica, nel caso di sistemi ad un numero infinito di gradi di libertà, a quelle densità di lagrangiana che presentino quella che prende il nome di *simmetria*. Il teorema della Noether afferma che se una densità $\mathcal{L}$ rimane invariata sotto trasformazioni di un gruppo di simmetria continuo a n parametri, ovvero verifica le uguaglianze (1.70) e (1.71), segue che il sistema possiede, lungo l'evoluzione temporale data dalle equazioni del moto, tante correnti conservate e di conseguenza tante cariche costanti nel tempo quanti sono i parametri che descrivono il gruppo, dove la conservazione della corrente si presenta nella forma di una equazione di continuità. In altri termini, il teorema della Noether stabilisce che ad ogni parametro di una simmetria continua corrisponde una *corrente conservata*.

È proprio in virtù di questo teorema, quindi, che le simmetrie rivestono un'importanza fondamentale nella fisica quantistica relativistica: per un dato sistema dinamico, ad ogni simmetria del sistema corrisponde una legge di conservazione e una corrente costante nel tempo che permette di classificare gli stati di quel sistema anche senza dover risolvere la dinamica del sistema generalmente molto complicata. Affinchè possa essere applicato il teorema della Noether, è necessario e sufficiente dunque che il sistema sia descritto da una lagrangiana e non occorre che da tale lagrangiana si possa ricavare anche un'hamiltoniana.

Per semplicità noi dimostreremo il teorema della Noether caso per caso. In generale però, bisogna supporre che una certa trasformazione infinitesima di simmetria (in cui, per comodità di notazione, il parametro α venga scritto come indice)

$$\phi(x) \rightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + \delta\phi_\alpha(x) \quad (1.72)$$

lasci invariata la densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$, ovvero si abbia l'uguaglianza

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x). \quad (1.73)$$

Osserviamo che $\delta\phi_\alpha(x)$ comprende sia la variazione infinitesima in forma della ϕ_α , sia il cambiamento di coordinate che viene assunto essere della forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (1.74)$$

1.7.1 Invarianza per Traslazioni Spazio-Temporali

Dal momento che vogliamo ora studiare l'invarianza per traslazioni consideriamo ora un gruppo di trasformazioni più ampio di quello di Lorentz e precisamente quello denominato *gruppo di Poincaré*,

gli elementi del quale si trasformano secondo la relazione

$$x' = \Lambda x + a \quad (1.75)$$

dove il quadrivettore a rappresenta appunto una traslazione dell'origine del riferimento. Poichè la densità lagrangiana di Klein-Gordon non dipende esplicitamente dalla variabile x , ma dipende dalla x solo attraverso i campi e le loro derivate, abbiamo che tale lagrangiana risulta essere invariante per traslazioni spazio-temporali $x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu$, nel senso che le soluzioni delle equazioni del moto sono le stesse in un sistema di riferimento e in tutti i sistemi traslati rispetto a questo. Se invece una lagrangiana avesse una dipendenza esplicita dalla x attraverso un campo esterno, due osservatori traslati uno rispetto all'altro "accorgerebbero" della diversa posizione in cui si trovano e le loro equazioni del moto non potrebbero avere le medesime soluzioni. Data dunque la simmetria della lagrangiana sotto traslazioni date dalla relazione

$$x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu, \quad (1.76)$$

consideriamo il parametro a^μ , che fornisce l'entità della traslazione, infinitesimo e cerchiamo quindi la corrente conservata che ne discende. Sappiamo che sotto cambiamento di riferimento $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$, un campo scalare $\Phi(x)$ per definizione è invariante *in valore* e *in forma*, ovvero vale l'uguaglianza $\Phi'(x') = \Phi(x)$. Pertanto si ha

$$\begin{cases} \delta\Phi = 0 \\ \delta x^\mu = x^{\mu'} - x^\mu = a^\mu. \end{cases} \quad (1.77)$$

Spezziamo ora la variazione della lagrangiana in due pezzi

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) \implies [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)] + [\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)] = 0 \quad (1.78)$$

ossia una variazione in valore e in forma. Ora espandendo questa equazione abbiamo

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x)] + [\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)] &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x^\mu} a^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \delta(\partial^\mu \Phi) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} a^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \delta(\partial^\mu \Phi) = 0 \end{aligned} \quad (1.79)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo eliminato l'apice ' alla densità di lagrangiana in quanto abbiamo trascurato termini di ordine superiore al primo. Ora, utilizzando le equazioni del moto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \right), \quad (1.80)$$

otteniamo

$$a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} + \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \delta\Phi \right) = 0. \quad (1.81)$$

Per trovare la variazione del campo Φ , partendo dall'invarianza $\Phi'(x') = \Phi(x)$, troviamo che

$$\Phi'(x + a) = \Phi(x) \implies \Phi'(x) = \Phi(x - a) \simeq \Phi(x) - a^\nu \partial_\nu \Phi(x) \quad (1.82)$$

e quindi

$$\delta\Phi = -a^\nu \partial_\nu \Phi(x). \quad (1.83)$$

Sostituendo questa espressione abbiamo

$$a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} - a^\nu \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi(x) \right) = 0, \quad (1.84)$$

che, eliminando il fattore a^ν e riarrangiando gli indici, può essere posta nella forma

$$\partial_\mu \mathcal{L} g^\mu_\nu - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi(x) \right) = 0, \quad (1.85)$$

ricordando che il tensore metrico scritto in forma mista è *sempre* una δ^μ_ν . Questa equazione può essere posta in una forma molto semplice

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{con} \quad T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial^\nu \Phi \right) - \mathcal{L} g^{\mu\nu}}. \quad (1.86)$$

Abbiamo ottenuto una *equazione di continuità*, da cui discenderà una *legge di conservazione*. Se integriamo l'equazione di continuità $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ in $d\mathbf{x}$, usando come al solito il teorema della divergenza, otteniamo

$$\partial_0 \int d\mathbf{x} T^0_\nu(x) = \partial_0 \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \partial_\nu \Phi - \mathcal{L} g^0_\nu \right) = 0 \quad (1.87)$$

ovvero 4 quantità conservate. Identifichiamo la prima quantità

$$\int d\mathbf{x} T^0_0 = \int d\mathbf{x} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - \mathcal{L} \right)}_{\text{Densità Hamiltoniana}} = H \quad (1.88)$$

che è l'espressione dell'energia trovata in precedenza. Le altre 3 quantità vengono identificate con l'impulso spaziale

$$\int d\mathbf{x} T^0_i = \int d\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \partial_i \Phi = \int d\mathbf{x} \dot{\Phi}(x) \partial_i \Phi(x) = P_i. \quad (1.89)$$

Come per l'energia, esprimiamo anche l'impulso spaziale in termini degli operatori $a(\mathbf{p})$, $a^\dagger(\mathbf{p})$ procedendo in modo analogo. Otteniamo quindi

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \left(a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \right) = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}), \quad (1.90)$$

avendo sottratto il termine costante infinito, come nel caso dell'energia. Nel formalismo discreto l'espressione dell'operatore impulso senza il termine infinito è

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}. \quad (1.91)$$

A questo punto l'interpretazione della teoria come somma di contributi di oscillatori armonici appare evidente. Se introduciamo l'*operatore numero di occupazione* $N_{\mathbf{p}}$ ponendo $N_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$ e lo definiamo come il numero di particelle aventi energia $\omega_{\mathbf{p}}$ e impulso $\mathbf{p}$, segue che le espressioni dell'energia e dell'impulso hanno la naturale interpretazione di somma rispettivamente delle energie e degli impulsi di tutte le particelle. Abbiamo trovato quindi che il campo di Klein-Gordon porta in ogni punto dello spazio-tempo un'energia e un impulso in modo tale che possa essere risolto il problema dell'azione a distanza (incompatibile con la relatività) connesso con il principio di azione e reazione.

1.7.2 Invarianza per Trasformazioni di Lorentz Proprie

Il gruppo di Lorentz è un gruppo costituito dall'insieme di tutte le trasformazioni di Lorentz ed è caratterizzato dalle seguenti equazioni

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} x^{\nu}, \quad \det \Lambda = +1 \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \quad (1.92)$$

Il gruppo di Lorentz proprio implica un certo numero di leggi di conservazione. Il numero di quantità conservate dipende dal numero di parametri indipendenti della trasformazione. Le trasformazioni di Lorentz dipendono da 6 parametri: 3 che dipendono dalle rotazioni spaziali (orientamento degli assi) e le 3 messe in moto lungo gli assi. Per poter applicare il teorema della Noether ci servono le trasformazioni di Lorentz infinitesime

$$\Lambda^\mu_{\nu} \simeq \delta^\mu_{\nu} + \varepsilon^\mu_{\nu}. \quad (1.93)$$

Qualunque trasformazione di Lorentz, non solo quelle proprie, soddisfano

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\rho} \Lambda^\nu_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \implies g_{\mu\nu} (\delta^\mu_{\rho} + \varepsilon^\mu_{\rho}) (\delta^\nu_{\sigma} + \varepsilon^\nu_{\sigma}) = g_{\rho\sigma}. \quad (1.94)$$

Buttando i termini di ordine di infinitesimo superiore al primo, otteniamo una restrizione su ε

$$g_{\rho\nu} \varepsilon^\nu_{\sigma} + g_{\mu\sigma} \varepsilon^\mu_{\rho} = 0 \implies \varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0 \quad (1.95)$$

ovvero ε deve essere antisimmetrico. Notare che ε non è un tensore doppio, non vive in un sistema di riferimento ma a cavallo tra due sistemi di riferimento (è una matrice di trasformazione dal sistema vecchio al sistema nuovo esattamente come la Λ). Abbiamo definito quindi in questo passaggio la ε con entrambi gli indici in basso semplicemente abbassando gli indici con il tensore metrico. La ε possiede quindi 6 componenti indipendenti.

Ora passiamo a descrivere la trasformazione dei campi. Per qualsiasi tipo di campo, sia scalare, vettoriale o spinoriale questo si trasforma in questo modo

$$\varphi'_a(x') = S_{a,b}(\Lambda) \varphi_b(x) \quad (1.96)$$

dove l'indice a tiene conto della natura del campo (nel caso nostro identifica le componenti del campo; nel caso dell'equazione di Dirac rappresenterà un indice dello spazio interno spinoriale; nel caso di un campo tensoriale identificherà i vari indici del campo stesso). Quando faccio una trasformazione di Lorentz sto cambiando l'orientamento degli assi; entità geometriche come gli scalari, vettori e spinori sono oggetti assoluti, ma le loro componenti non lo sono in quanto relative ad una base. Le componenti quindi si mescolano tra di loro: questo è il senso della matrice $S_{a,b}$ che dipende dal tipo di trasformazione Λ . Nel caso del campo scalare S sarà l'identità, mentre nel caso del campo elettromagnetico sarà banalmente la matrice Λ . Vi sono però casi più generali (vedi Dirac). La matrice S fornisce una rappresentazione del gruppo di Lorentz nel senso

$$S(\Lambda_2) S(\Lambda_1) = S(\Lambda_2 \Lambda_1) \quad (1.97)$$

l'algebra delle matrici S riproduce o rappresenta l'algebra del gruppo di Lorentz. Richiediamo che questa S sia invertibile. Inoltre, sviluppando in serie di Taylor al primo ordine la (1.96) con $x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu_{\nu} x^\nu$ otteniamo

$$S_{a,b} \approx \delta_{ab} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}_{ab}. \quad (1.98)$$

Abbiamo una matrice M per ogni μ, ν parametro che ho a disposizione (collegati con la trasformazione). Invece a, b sono gli indici di matrice. Si può notare da questa relazione come M sia un oggetto antisimmetrico negli indici μ, ν (sennò $S_{a,b}$ si ridurrebbe a $\delta_{a,b}$).

Per questo gruppo di simmetria possiamo costruire la corrente conservata corrispondente all'invarianza della lagrangiana per trasformazioni di Lorentz grazie al teorema della Noether

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) \implies \mathcal{L}'(x') + \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = 0. \quad (1.99)$$

La trasformazione infinitesima è

$$x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (1.100)$$

Facendo i soliti conti otteniamo

$$\partial_\mu \mathcal{L}'(x) \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta \partial_\mu \varphi_a = 0. \quad (1.101)$$

Possiamo ora eliminare il $'$ alla densità lagrangiana nel primo termine, sempre per attenerci a termini del primo ordine. Utilizzando le equazioni del moto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right)$ otteniamo

$$\partial_\mu \mathcal{L}(x) \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} \delta \varphi_a \right) = 0. \quad (1.102)$$

Cerchiamo ora l'espressione della variazione del campo φ_a calcolata nel punto x

$$\begin{aligned} \varphi'_a(x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu) &= \varphi_a(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{ab}^{\mu\nu} \varphi_b(x) \\ \varphi'_a(x) &= \varphi'_a(x^\mu - \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{ab}^{\mu\nu} \varphi_b(x) \approx \varphi_a(x) - \partial_\mu \varphi_a(x) \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{ab}^{\mu\nu} \varphi_b(x) \end{aligned} \quad (1.103)$$

essendoci fermati sempre al primo ordine. Pertanto abbiamo che

$$\delta \varphi_a(x) \simeq -\partial_\mu \varphi_a(x) \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{ab}^{\mu\nu} \varphi_b(x). \quad (1.104)$$

Inserendo (1.104) all'interno di (1.102) otteniamo

$$\partial^\mu \left[\mathcal{L}(x) \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_a} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma} M_{ab}^{\rho\sigma} \varphi_b(x) - \varepsilon_{\rho\sigma} x^\sigma \partial^\rho \varphi_a(x) \right) \right] = 0 \quad (1.105)$$

dove la derivata $\partial_\mu x^\nu = \delta^\nu{}_\mu$ rende nullo il termine corrispondente per l'antisimmetria di $\varepsilon_{\mu\nu}$. Prima di semplificare quest'ultimo da tutta l'equazione, dobbiamo prima antisimmetrizzare. L'antisimmetrizzazione del primo addendo produce

$$\partial^\mu (\mathcal{L} \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\partial^\mu x^\nu - \partial^\nu x^\mu) \mathcal{L} = \partial^\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\nu} (x^\nu g^\rho{}_\mu - x^\rho g^\nu{}_\mu) \right) \mathcal{L}; \quad (1.106)$$

il terzo addendo invece

$$- \frac{\varepsilon_{\rho\sigma}}{2} (\partial^\rho \varphi x^\sigma - \partial^\sigma \varphi x^\rho). \quad (1.107)$$

Otteniamo pertanto

$$\partial^\mu \left[(x^\sigma g^\rho{}_\mu - x^\rho g^\sigma{}_\mu) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_a} \left(M_{ab}^{\rho\sigma} \varphi_b(x) - \partial^\rho \varphi_a x^\sigma + \partial^\sigma \varphi_a x^\rho \right) \right] = 0. \quad (1.108)$$

Possiamo riscrivere l'equazione in modo più compatto tramite l'uso del tensore energia impulso

$$T^\sigma_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_a} \partial^\sigma \varphi_a - g^\sigma_\mu \mathcal{L} \quad (1.109)$$

ottenendo

$$\partial^\mu \mathcal{M}^{\sigma\rho}_\mu = 0 \quad \text{con} \quad \boxed{\mathcal{M}^{\sigma\rho}_\mu = (x^\rho T^\sigma_\mu - x^\sigma T^\rho_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_a} M^{\rho\sigma}_{ab} \varphi_b(x)}. \quad (1.110)$$

In quest'ultima equazione possiamo osservare che il primo addendo rappresenta il momento angolare orbitale, mentre il secondo rappresenta il momento angolare intrinseco, o di spin.

Questo è un set di 6 equazioni come previsto. Esaminiamo quindi i due casi

PRIMO CASO: $\rho = i, \sigma = j$

Concetriamoci ora sugli indici spaziali. Integrando la (1.110) in $d\mathbf{x}$ e utilizzando le formule di Green che annullano la divergenza spaziale, otteniamo

$$\mathcal{M}^{ij} = \int d\mathbf{x} \mathcal{M}^{ji}_0 = \int d\mathbf{x} \left[(x^i T^j_0 - x^j T^i_0) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} M^{ij}_{ab} \varphi_b(x) \right] \quad (1.111)$$

Nel caso del *campo scalare* sappiamo che $M^{\rho\sigma}_{ab} = 0$ in quanto per trasformazioni di Lorentz i campi scalari rimangono invariati: $\Phi'(x') = \Phi(x)$. Otteniamo come quantità conservata

$$\mathcal{M}^{ij} = \int d\mathbf{x} (x^i T^j_0 - x^j T^i_0) \quad (1.112)$$

Sostituendo l'espressione del tensore energia impulso otteniamo

$$\mathcal{M}^{ij} = \int d\mathbf{x} (x^i \mathcal{P}^j(x) - x^j \mathcal{P}^i(x)) \quad (1.113)$$

dove il termine $\mathcal{P}^i(x)$ rappresenta la densità di impulso $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \partial^i \varphi_a$. Siamo arrivati alla legge di conservazione del momento angolare $\mathcal{J}^k = \varepsilon^k_{ij} \mathcal{M}^{ij}$. Per passare al caso quantistico dobbiamo semplicemente inserire l'espressione della densità di impulso espressa in termini degli operatori di creazione e distruzione. Facendo i conti si ottiene

$$\mathcal{M}^{ij} = i \int d\mathbf{p} (\nabla^i_{\mathbf{p}} p^j - \nabla^j_{\mathbf{p}} p^i) a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad (1.114)$$

dove $\nabla^i_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\partial}{\partial p_i}$. Per capirne il significato applichiamo questo operatore allo stato di singola particella generico

$$|A\rangle = \int d\mathbf{q} f(\mathbf{q}) a^\dagger_{\mathbf{q}} |0\rangle \quad (1.115)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{ij} |A\rangle &= i \int d\mathbf{q} d\mathbf{p} f(\mathbf{q}) (\nabla^i_{\mathbf{p}} p^j - \nabla^j_{\mathbf{p}} p^i) a^\dagger_{\mathbf{p}} [a_{\mathbf{p}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] |0\rangle \\ &= i \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) (\nabla^i_{\mathbf{p}} p^j - \nabla^j_{\mathbf{p}} p^i) a^\dagger_{\mathbf{p}} |0\rangle \end{aligned} \quad (1.116)$$

si vede quindi che uno stato ad impulso 0 (particella a riposo) è autostato dell'operatore momento angolare con autovalore 0. Pertanto il campo scalare rappresenta un campo di particelle a spin 0. Complicazioni aggiuntive vi sono nel caso di campi che descrivono particelle di massa nulla (vedi capitolo 2).

SECONDO CASO: $\rho = i$, $\sigma = 0$

Otteniamo come quantità conservata

$$\mathcal{M}^{0i} = \int d\mathbf{x} \left(x^0 T^i_0(x) - x^i T^0_0(x) \right) \quad (1.117)$$

derivando nel tempo si ha

$$\frac{d}{dx^0} \mathcal{M}^{0i} = \int d\mathbf{x} T^{0i}(x) + x^0 \frac{d}{dx^0} \int d\mathbf{x} T^{0i}(x) - \frac{d}{dx^0} \int d\mathbf{x} x^i T^{00}(x) = 0 \quad (1.118)$$

dove il primo termine rappresenta l'impulso totale e il secondo addendo si annulla in quanto l'impulso totale è una quantità conservata. Abbiamo quindi che

$$\mathcal{P}^i = \frac{d}{dx^0} \int x^i T^{00}(x) d\mathbf{x}. \quad (1.119)$$

Interpretiamo l'integrale come il valor medio della posizione pesata con l'energia. Normalizzando otteniamo il *baricentro dell'energia*

$$X^i = \frac{\int d\mathbf{x} x^i T^{00}(x)}{\int d\mathbf{x} T^{00}}; \quad (1.120)$$

nel caso classico anzichè avere come peso l'energia avevamo la densità di massa. Il tutto si può riscrivere in modo più compatto

$$\frac{d}{dx^0} X^i = \frac{\mathcal{P}^i}{H} \quad \text{con} \quad H = \int d\mathbf{x} T^{00}(x). \quad (1.121)$$

Il baricentro si muove pertanto di moto rettilineo uniforme (impulso fratto energia dà la velocità della particella).

1.8 Propagatore del campo di Klein-Gordon

Iniziamo calcolando la seguente quantità

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{q}}}} \langle 0 | [a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}] [a_{\mathbf{q}} e^{-iqy} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iqy}] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{q}}}} e^{-ipx} \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} | 0 \rangle e^{iqy} \\ &= \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{q}}}} e^{-ipx} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{iqy} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \quad (1.122)$$

ovvero

$$\langle 0 | \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \equiv i\Delta^{(+)}(x-y) \quad (1.123)$$

e, analogamente

$$\langle 0 | \Phi(y) \Phi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \equiv i\Delta^{(-)}(x-y). \quad (1.124)$$

Utilizzando queste quantità possiamo verificare la consistenza della teoria dimostrando che il commutatore a tempi uguali di $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$ risulta effettivamente nullo

$$\langle 0 | [\Phi(x), \Phi(y)] \Big|_{x^0=y^0} | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \left[e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} - e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right] = 0, \quad (1.125)$$

in quanto la funzione tra le parentesi quadre è antisimmetrica in $\mathbf{p}$ mentre la frazione $d\mathbf{p}/\omega_{\mathbf{p}}$ è simmetrica.

Poichè quindi i campi a tempi uguali commutano, definiamo per tempi distinti $x^0 \neq y^0$ quello che si chiama *prodotto tempo ordinato* o semplicemente *T-prodotto*

$$T(\Phi(x) \Phi(y)) = \begin{cases} \Phi(x) \Phi(y) & \text{se } x^0 > y^0 \\ \Phi(y) \Phi(x) & \text{se } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (1.126)$$

riscrivibile nella forma

$$T(\Phi(x) \Phi(y)) = \Theta(x^0 - y^0) \Phi(x) \Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y) \Phi(x) \quad (1.127)$$

dove Θ è la funzione *theta di Heaviside* che vale 1 su un argomento positivo e zero su un argomento negativo. Vogliamo ora applicare l'operatore di Klein-Gordon $(\square_x + m^2)$ al T-prodotto $T(\Phi(x) \Phi(y))$. Per fare ciò iniziamo calcolando la derivata rispetto a x^0

$$\begin{aligned} \partial_{x^0} T(\Phi(x) \Phi(y)) &= \Theta(x^0 - y^0) \dot{\Phi}(x) \Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y) \dot{\Phi}(x) + \delta(x^0 - y^0) \Phi(x) \Phi(y) \\ &\quad - \delta(y^0 - x^0) \Phi(y) \Phi(x) = \Theta(x^0 - y^0) \dot{\Phi}(x) \Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y) \dot{\Phi}(x) \\ &\quad + \delta(x^0 - y^0) [\Phi(x), \Phi(y)] \Big|_{x^0=y^0} = \Theta(x^0 - y^0) \dot{\Phi}(x) \Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y) \dot{\Phi}(x). \end{aligned} \quad (1.128)$$

La derivata seconda sarà

$$\begin{aligned} \partial_{x^0}^2 T(\Phi(x) \Phi(y)) &= \Theta(x^0 - y^0) \ddot{\Phi}(x) \Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y) \ddot{\Phi}(x) \\ &\quad + \delta(x^0 - y^0) [\ddot{\Phi}(x), \Phi(y)] \Big|_{x^0=y^0} = \Theta(x^0 - y^0) \ddot{\Phi}(x) \Phi(y) + \Theta(y^0 - x^0) \Phi(y) \ddot{\Phi}(x) - i\delta^4(x - y), \end{aligned}$$

ovvero

$$\partial_{x^0}^2 \langle 0 | T(\Phi(x) \Phi(y)) | 0 \rangle = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \ddot{\Phi}(x) \Phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \Phi(y) \ddot{\Phi}(x) | 0 \rangle - i\delta^4(x - y)$$

Calcoliamone ora il laplaciano di rispetto alla variabile $\mathbf{x}$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \langle 0 | T(\Phi(x) \Phi(y)) | 0 \rangle = \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi(x)] \Phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \Phi(y) [\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi(x)] | 0 \rangle.$$

Rimettendo ora insieme i termini delle derivate seconde temporale e spaziale, quando il campo scalare $\Phi(x)$ è soluzione dell'equazione di Klein-Gordon otteniamo dunque lo sviluppo

$$(\square_x + m) \langle 0 | T(\Phi(x) \Phi(y)) | 0 \rangle = -i\delta^4(x - y). \quad (1.129)$$

Chiamiamo dunque la funzione

$$i\Delta_F(x - y) \equiv \langle 0 | T(\Phi(x) \Phi(y)) | 0 \rangle \quad (1.130)$$

propagatore del campo scalare e $\Delta_F(x-y)$ viene denominata *delta di Feynman*. La delta di Feynman risulta dunque essere soluzione dell'equazione

$$\left(\square_x + m^2 \right) \Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y) \quad (1.131)$$

ovvero il propagatore coincide, a meno di costanti moltiplicative, con la funzione di Green per l'equazione di Klein-Gordon. Il ruolo della funzione di Green di un operatore differenziale L è quello di determinare la soluzione particolare della corrispondente equazione differenziale non omogenea. Data dunque l'equazione differenziale non omogenea $Lu = f$, dove la u è la funzione incognita e la f è una funzione assegnata, risolviamo prima l'equazione $L[G(x-y)] = -\delta^4(x-y)$ perchè con la sua soluzione che è la funzione di Green $G(x-y)$, possiamo esprimere la soluzione particolare dell'equazione $Lu = f$ scrivendo

$$u(x) = - \int G(x-y) f(y) dy, \quad (1.132)$$

infatti, applicando l'operatore L ad ambo i membri si ottiene $Lu(x) = f(x)$. A questo punto vorremmo ottenere la $\Delta_F(x-y)$ come soluzione dell'equazione (1.131) che risolveremo con il metodo della trasformata di Fourier. Dalla definizione di T-prodotto segue che la $\Delta_F(x-y)$ ottenuta come soluzione della (1.131), dovrà verificare

$$i\Delta_F(x-y) = \begin{cases} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \equiv i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{se } x^0 > y^0 \\ \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \equiv i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{se } x^0 < y^0. \end{cases} \quad (1.133)$$

Esprimendo ora la $\Delta_F(x-y)$ e la $\delta(x-y)$ come antitrasformate di Fourier

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_F(q) e^{iq(x-y)} \\ \delta(x-y) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)}, \end{aligned} \quad (1.134)$$

che, sostituite all'interno della (1.131) forniscono

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_F(q) e^{iq(x-y)} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [m^2 - q^2] \tilde{\Delta}_F(q) e^{iq(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\omega_{\mathbf{q}}^2 - (q^0)^2] \tilde{\Delta}_F(q) e^{iq(x-y)} = - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Ricordando che la trasformata di Fourier è invertibile e solo la funzione nulla ha trasformata di Fourier nulla, per confronto si ricava

$$\tilde{G}(q) = \frac{1}{q^2 - m^2} = \frac{1}{(q^0)^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2}; \quad (1.136)$$

sostituendo questa espressione otteniamo che la delta di Feynman assume la forma

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 - m^2}. \quad (1.137)$$

Questo integrale risulta logaritmicamente divergente; infatti

$$\Delta_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{q^2 - m^2} \int dq^0 \frac{e^{iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_{\mathbf{q}})(q^0 - \omega_{\mathbf{q}})}. \quad (1.138)$$

Possiamo risolvere l'integrale in dq^0 con il metodo dei residui utilizzando un opportuno cammino di integrazione $\mathcal{C}$ sul piano complesso in cui consideriamo il prolungamento analitico della variabile reale q^0 , ponendo sugli assi la parte reale e complessa di q^0 . Si può deformare il cammino d'integrazione in q^0 localmente sul piano complesso (cioè intorno a qualche punto), ma q^0 deve rimanere asintoticamente reale perchè se q^0 fosse complesso anche all'infinito, sorgerebbero nell'esponenziale divergenze prive di senso. Poichè possiamo deformare localmente il cammino di integrazione in modo arbitrario, segue che vi sono infinite funzioni di Green dell'equazione di Klein-Gordon. D'altra parte non è sorprendente che ogni cammino porti ad una diversa funzione di Green perchè la soluzione particolare di un'equazione lineare non è unica. Consideriamo allora quattro soluzioni di base che si ottengono integrando sui quattro cammini riportati in .

Dimostriamo quindi che solo l'integrazione sul cammino in basso a destra fornisce la corretta espressione del propagatore $\Delta_F(x-y)$ coerente con la (1.133). Infatti, se $x^0 > y^0$ chiuderemo il cammino in basso a destra in senso antiorario positivo con una semicirconferenza nel semipiano positivo di $Im(q^0)$ in modo tale che il contributo di tale semicirconferenza sia nullo all'infinito e il solo polo interno al cammino di integrazione sia $q^0 = -\omega_{\mathbf{q}}$, ovvero

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_{\mathcal{C}} dq^0 \frac{e^{iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_{\mathbf{q}})(q^0 - \omega_{\mathbf{q}})} \\ &= \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\mathbf{q} \left. \frac{e^{iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 - \omega_{\mathbf{q}})} \right|_{q^0=-\omega_{\mathbf{q}}} \\ &= -i \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{q}}(x^0-y^0)-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega_{\mathbf{q}}} = -i \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2\omega_{\mathbf{p}}}, \end{aligned} \quad (1.139)$$

coerente con la prima delle (1.133). Nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambiamento di variabile $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$ da cui segue $\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{p}}$ e $d\mathbf{q} = d\mathbf{p}$ perchè lo jacobiano di tale cambiamento di variabile è l'opposto della matrice identità e il suo determinante ha modulo 1. Inoltre si è posto $p^0 \equiv \omega_{\mathbf{p}}$.

Se invece $x^0 < y^0$ chiuderemo il cammino con una semicirconferenza, nel semipiano negativo di $Im(q^0)$ e l'integrale avrà segno negativo contenendo il solo polo $q^0 = \omega_{\mathbf{q}}$ come polo interno al cammino di integrazione, ovvero

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_{\mathcal{C}} dq^0 \frac{e^{iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_{\mathbf{q}})(q^0 - \omega_{\mathbf{q}})} \\ &= -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d\mathbf{q} \left. \frac{e^{iq^0(x^0-y^0)}}{(q^0 + \omega_{\mathbf{q}})} \right|_{q^0=\omega_{\mathbf{q}}} \\ &= -i \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{q}}(x^0-y^0)-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega_{\mathbf{q}}} = -i \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip(x-y)}}{2\omega_{\mathbf{p}}}, \end{aligned} \quad (1.140)$$

coerente con la seconda delle (1.133), avendo posto sempre $p^0 \equiv \omega_{\mathbf{p}}$. L'integrale che fornisce la $\Delta_F(x-y)$ può essere calcolato anche con la parte principale di Cauchy, ovvero possiamo introdurre

un $\varepsilon > 0$ nella (1.137) in modo da ottenere

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (1.141)$$

che equivale a “spostare di poco” verticalmente i poli. Questa rappresentazione del propagatore viene detta *rappresentazione secondo la prescrizione di Feynman*. Ricapitolando il propagatore del campo di Klein-Gordon assume le due equivalenti forme

$$\Delta_F(x-y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 - m^2} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (1.142)$$

1.9 Microcausalità

Il problema della microcausalità è connesso con il postulato del collasso della funzione d'onda. Come sappiamo dalla meccanica quantistica non relativistica, tale collasso avviene *istantaneamente* a tempi fissati non appena venga effettuata una misura, ma nella teoria non relativistica questo aspetto non crea problemi. Nella meccanica quantistica relativistica, invece, il postulato del collasso della funzione d'onda genera un problema concettuale notevole perchè si potrebbe pensare di sfruttare tale collasso istantaneo per inviare un segnale a velocità superiore rispetto a quella della luce anche fuori dal cono di luce. In altri termini, supponiamo che un osservatore O_A esegua la misura dell'osservabile A nel punto $\mathbf{x}_A$ all'istante t_A e un osservatore O_B esegua la misura dell'osservabile B nel punto $\mathbf{x}_B$ all'istante t_B . Se gli eventi $x_A = (t_A, \mathbf{x}_A)$ e $x_B = (t_B, \mathbf{x}_B)$ hanno distanza di tipo spazio $x_A \sim x_B$ (ovvero ciascuno dei due eventi stesse fuori dal cono di luce generato dall'altro) e se le due misure interferissero fra loro, segue che tale processo di misurazione potrebbe essere utilizzato per trasferire informazioni da un punto all'altro dello spazio-tempo. Ma se ciò fosse possibile, significherebbe che tali informazioni, per andare da un punto dello spazio-tempo ad un altro esterno al proprio cono di luce, dovrebbe viaggiare a velocità superiore a quella della luce.

Poichè vogliamo dunque che le misure di due osservabili A e B non interferiscano fra loro quando vengono eseguite rispettivamente da due osservatori O_A e O_B negli eventi x_A e x_B aventi distanza di tipo spazio, dimostriamo che la condizione affinché tali misure non interferiscano (ovvero affinché un osservatore non possa avere informazioni sull'operato dell'altro) è che il commutatore degli operatori A e B corrispondenti alle osservabili, sia nullo.

Diremo che non vi è trasmissione di informazione dall'osservatore O_A all'osservatore O_B se il risultato della misura dell'osservabile B , eseguita dall'osservatore O_B , è sempre il medesimo qualunque sia stata la scelta dell'osservatore O_A (ovvero se ha misurato l'osservabile A oppure no). Quindi se l'osservatore O_B non si “accorge” di quale scelta abbia fatto l'osservatore O_A , potremo dire che non è possibile sfruttare il processo di misura per trasmettere informazione dall'osservatore O_A all'osservatore O_B . Dimostriamo allora che la condizione affinché il valor medio ottenuto dall'osservatore O_B nella misura di B sia sempre il medesimo indipendentemente dal fatto che l'osservatore O_A abbia misurato l'osservabile A oppure no, è che valga

$$[A, B] = 0, \quad (1.143)$$

ovvero che le due osservabili commutino. Supponiamo dunque uno stato $|\psi\rangle$ che “invada” tutto l'universo e sia valido per entrambi gli osservatori. Nella prima delle due situazioni, ovvero se

l'osservatore O_A non esegue la misura di A , lo stato $|\psi\rangle$ non subisce nessun collasso e rimane inalterato e quando allora l'osservatore O_B esegue su di esso la propria misura dell'osservabile B , trova il valor medio

$$\langle B \rangle = \text{Tr}(\rho B) = \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | B | n \rangle = \langle \psi | B | \psi \rangle , \quad (1.144)$$

con ρ matrice densità. Se invece l'osservatore O_A esegue la misura di A , la matrice densità ρ diventa la miscela statistica

$$\rho = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} |\psi\rangle \langle \psi| \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} , \quad (1.145)$$

dove $\mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} = |\lambda\rangle \langle \lambda|$ rappresenta il proiettore sugli stati di A . Basta quindi dimostrare che, se per vale la (1.143), abbiamo anche in questo caso che il valor medio ottenuto dall'osservatore O_B quando esegue su tale miscela statistica la misura dell'osservabile B , è sempre $\langle \psi | B | \psi \rangle$. Infatti

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \text{Tr}(\rho B) = \sum_{n,\lambda} \langle n | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} | \psi \rangle \langle \psi | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B | n \rangle = \sum_{n,\lambda} \langle \psi | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B | n \rangle \langle n | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} | \psi \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \langle \psi | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} | \psi \rangle = \sum_{\lambda} \langle \psi | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B | \psi \rangle = \sum_{\lambda} \langle \psi | \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B | \psi \rangle \\ &= \sum_{\lambda} \langle \psi | |\lambda\rangle \langle \lambda| B | \psi \rangle = \langle \psi | B | \psi \rangle , \end{aligned} \quad (1.146)$$

dove si usata la relazione con i proiettori $\mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} = \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B = \mathcal{P}_{\lambda}^{(A)} B$ che segue dalla considerazione che se B commuta con A , allora B commuta anche con tutti i proiettori sugli autostati di A . Quindi, poichè il valor medio dell'osservabile B misurato dall'osservatore O_B è sempre il medesimo indipendentemente da quello che ha fatto l'osservatore O_A , concludiamo che O_B non ha ricevuto informazione riguardo alla scelta dell'osservatore O_A . Tale proprietà si poteva evidenziare subito dalla relazione di indeterminazione di Heisenberg per una coppia di variabili incompatibili (non hanno una base comune di autostati) o, equivalentemente, di osservabili che non commutano

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle . \quad (1.147)$$

1.9.1 Principio di microcausalità

In base alla struttura causale dello spazio-tempo, l'invalidità della velocità della luce è equivalente all'impossibilità di inviare segnali luminosi (o informazioni tramite essi) da un certo punto P dello spazio-tempo verso tutti quei punti che si trovano all'esterno del cono di luce di P stesso. Nella meccanica quantistica relativistica deve accadere quindi che due misure effettuate una in un punto indicato con x e una in un punto indicato con y dello spazio-tempo tali che x e y abbiano distanza di tipo spazio, non interferiscano fra loro, perchè se interferissero la teoria quantistica sarebbe inconsistente con la relatività in quanto tramite un processo di misura e il conseguente collasso della funzione d'onda, sarebbe possibile inviare informazioni da un punto x verso un punto y esterno al suo cono di luce, ovvero a velocità superiore a quella della luce e contro il postulato di causalità. Il principio per cui due misure non interferiscono fra loro quando vengono effettuate una in un punto x e una in un punto y dello spazio-tempo tali che $x \sim y$, viene denominato *principio di microcausalità*. Poichè quando il commutatore di due operatori hermitiani è diverso da zero,

si ha che le misure dei due campi osservabili corrispondenti interferiscono, segue che in meccanica quantistica relativistica il principio di microcausalità si esprime dicendo che vale

$$[\Phi(x), \Phi(y)] \Big|_{x \sim y} = 0. \quad (1.148)$$

Vogliamo sottolineare il fatto che il principio di microcausalità, a questo punto, non è un postulato aggiuntivo da imporre, ma deve essere una proprietà valida intrinsecamente nella teoria, se la teoria vuole avere senso relativistico. Quindi noi possiamo solo verificare se la teoria rispetta tale principio o no, ma non possiamo inserirlo tramite richiesta dall'esterno. Solo i campi che soddisfano il principio di microcausalità possono essere empiricamente osservati (con l'equazione di Dirac per far sì che non sia violata la causalità, si ammetterà che il campo di Dirac non è osservabile). Per semplicità riportiamo qui le espressioni delle funzioni

$$\begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-y) \equiv \langle 0 | \Phi(x) \Phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ i\Delta^{(-)}(x-y) \equiv \langle 0 | \Phi(y) \Phi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \end{cases} \quad (1.149)$$

che sono utili per calcolare il commutatore dei campi

$$\Delta(x-y) = \langle 0 | [\Phi(x), \Phi(y)] | 0 \rangle = i\Delta^{(+)}(x-y) - i\Delta^{(-)}(x-y). \quad (1.150)$$

Sappiamo già, per averlo imposto in precedenza, che a tempi uguali $x^0 = y^0$ effettivamente vale $\Delta(x-y) = 0$, ma ancora non sappiamo nulla sul commutatore di due campi a tempi distinti. Per dimostrare (1.148), ci basterà dimostrare che per ogni trasformazione di Lorentz Λ vale

$$\Delta(x-y) = \Delta(\Lambda(x-y)) \quad (1.151)$$

da cui segue, ricordando la struttura causale dello spazio-tempo, che possiamo sempre trovare una trasformazione di Lorentz $\tilde{\Lambda}$ che trasformi gli eventi x, y in eventi x', y' simultanei in modo tale che valga dunque

$$\Delta(x-y) = \Delta(\tilde{\Lambda}(x-y)) = \Delta(x'-y') = \langle 0 | [\Phi(x'), \Phi(y')] \Big|_{x'^0=y'^0} | 0 \rangle = 0, \quad (1.152)$$

se $x \sim y$. Per dimostrare la (1.151), dimostriamo preliminarmente che la misura di integrazione

$$d\mu_{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \quad (1.153)$$

risulta covariante di Lorentz. A tale scopo ricordiamo la proprietà della delta di Dirac espressa dalla relazione

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (1.154)$$

dove gli x_i sono tutti gli zeri della funzione $g(x)$ che possiede solo zeri semplici. Se usiamo questa proprietà, otteniamo

$$\begin{aligned} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) f(p) &= \int d^4p \delta((p^0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2) \Theta(p^0) f(p) \\ &= \int d\mathbf{p} \int dp^0 \left[\frac{\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{\delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} \right] \Theta(p^0) f(p) \\ &= \int d\mathbf{p} \int dp^0 \frac{\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} \Theta(p^0) f(p) = \int d\mathbf{p} \frac{\Theta(\omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} f(p) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} f(p), \end{aligned} \quad (1.155)$$

da cui ricaviamo l'uguaglianza fra misure di integrazione

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} f(p) = \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) f(p). \quad (1.156)$$

A questo punto osserviamo che il differenziale quadridimensionale d^4p e il modulo quadro p^2 quadridimensionale sono palesemente invarianti di Lorentz. Inoltre la $\Theta(p^0)$ rappresenta il segno di p^0 e sebbene la parte temporale di un quadrivettore non sia mai in generale invariante di Lorentz, il suo segno è invariante quando tutto il quadrivettore ha norma positiva, come è nel caso del quadrivettore p nell'argomento della $\delta(p^2 - m^2)$ per il quale vale in effetti $p^2 = m^2 > 0$ ($\mathbf{p}$ è di genere tempo). La misura al secondo membro della (1.156) è effettivamente invariante di Lorentz $d\mu(p) = d\mu(p')$. Indichiamo dunque con Λ una generica trasformazione di Lorentz. Se dopo aver posto $x' = \Lambda x$ e $y' = \Lambda y$, cambiamo variabile di integrazione $p' = \Lambda p$, si ha che $\Delta(x - y)$ è invariante di Lorentz perchè vale

$$\begin{aligned} \Delta(\Lambda(x - y)) &= \Delta(x' - y') = \langle 0 | [\Phi(x'), \Phi(y')] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d\mu(p)}{(2\pi)^3} [e^{-ip(x'-y')} - e^{ip(x'-y')}] = \int \frac{d\mu(p')}{(2\pi)^3} [e^{-ip'(x'-y')} - e^{ip'(x'-y')}] \\ &= \int \frac{d\mu(p)}{(2\pi)^3} [e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}] = \Delta(x - y), \end{aligned} \quad (1.157)$$

dove i prodotti scalari sono invarianti $p'(x' - y') = \Lambda p \Lambda(x - y) = p(x - y)$. Possiamo quindi concludere osservando che inizialmente i commutatori canonici per il campo $\Phi(x)$ sono stati imposti relativamente ad eventi con tempi uguali (che di conseguenza hanno distanza di genere spazio); ma poi l'invarianza di Lorentz ci ha assicurato che la relazione del commutatore canonico $\Delta(x - y) = 0$ vale non solo per coppie di eventi con distanza del genere spazio in quanto simultanei, ma continua poi ad essere valida per qualsiasi coppia di eventi $x \sim y$, in modo che la teoria risulti dunque consistente con la relatività. Una teoria si dice *locale* se i prodotti dei campi fondamentali e delle loro derivate sono calcolati in un medesimo punto e se i campi verificano il principio di microcausalità. Le osservabili dipendenti dai prodotti di campi fondamentali e delle loro derivate si dicono *osservabili locali* e possono essere misurate: esempi di osservabili locali sono $\Phi^2(x)$, la densità di Hamiltoniana, mentre l'energia H non è un'osservabile locale perchè è un integrale.

1.9.2 Prodotto normale

Poichè i quadrati di due campi valutati nel medesimo punto x , sono sempre quantità divergenti, come si può ad esempio notare da

$$\langle 0 | \Phi^2(x) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} \approx \int |\mathbf{p}| d|p| \quad (1.158)$$

(che risulta quadraticamente divergente), sostituiamo il prodotto ordinario di operatori con quello che prende il nome di *prodotto ben ordinato* o *prodotto normale* di operatori. Per definirlo, esprimiamo la $\Phi(x)$ nella forma

$$\Phi(x) = \Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x), \quad (1.159)$$

dove $\Phi^{(+)}(x)$ è il termine con frequenza positiva contenente l'operatore di annichilazione a e viceversa per $\Phi^{(-)}(x)$. Il quadrato di $\Phi(x)$ è dato da

$$\Phi^2(x) = \Phi^{(+)}(x)\Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(+)}(x)\Phi^{(-)}(x) + \Phi^{(-)}(x)\Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x)\Phi^{(-)}(x), \quad (1.160)$$

da cui si vede che la divergenza è dovuta al termine $\Phi^{(+)}(x)\Phi^{(-)}(x)$ contenente l'operatore $aa^\dagger$. Il prodotto ben ordinato dell'operatore $\Phi^2(x)$, indicato con il simbolo $:\Phi^2(x):$ è definito allora in modo tale che nello sviluppo in termini di operatori a frequenza positiva e negativa, tutte le frequenze negative, ovvero gli operatori di creazione, stiano a sinistra di tutte le frequenze positive, ovvero tutti gli operatori di distruzione, stiano a destra. Otteniamo quindi

$$:\Phi^2(x): = \Phi^{(+)}(x)\Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x)\Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x)\Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x)\Phi^{(-)}(x). \quad (1.161)$$

Il prodotto ben ordinato, comunque, non definisce quale osservabile venga misurata, ma è solo, a questo livello, un modo per rimuovere alcuni infiniti. Ad esempio il processo di sottrazione degli infiniti nella Hamiltoniana, giustificato sulla base dell'energia di essere definita sempre a meno di una costante additiva, equivale a ridefinire l'hamiltoniana prendendo come quadrati degli operatori i loro prodotti ben ordinati. Riferendoci ad esempio all'hamiltoniana, la sottrazione dell'infinito equivale a riscrivere

$$H = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left(:\dot{\Phi}^2: - :|\nabla\Phi|^2: + m^2 :\Phi^2: \right) \quad (1.162)$$

1.10 Il Campo Di Klein-Gordon Non Hermitiano

Il campo di Klein-Gordon trattato finora è quello hermitiano che dal punto di vista classico è reale. Consideriamo ora un campo $\Phi(x)$ complesso

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}} \quad (1.163)$$

scritto in termini dei due campi reali $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(x)$ e l'azione funzione di due variabili indipendenti $\Phi, \bar{\Phi}$

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int d^4x \left(\partial_\mu \bar{\Phi} \partial^\mu \Phi - m^2 \bar{\Phi} \Phi \right) \quad (1.164)$$

dove $\bar{\Phi}$ è un campo che, lungo le equazioni del moto, risulterà l'hermitiano coniugato del campo $\Phi(x)$

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{\Phi_1(x) - i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (1.165)$$

La variazione dell'azione che abbiamo costruito fornisce due equazioni di Klein-Gordon per i campi $\bar{\Phi}, \Phi$. Infatti per l'arbitrarietà delle variazioni $\delta\bar{\Phi}$ e $\delta\Phi$,

$$\begin{cases} (\square + m^2) \Phi = 0 \\ (\square + m^2) \bar{\Phi} = 0, \end{cases} \quad (1.166)$$

le cui soluzioni come operatore (cioè dal punto di vista quantistico) sono

$$\begin{cases} \Phi(x) = \int d\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) \\ \bar{\Phi}(x) = \int d\mathbf{p} \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(b(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right), \end{cases} \quad (1.167)$$

dove gli operatori a e b non sono più uno hermitiano coniugato dell'altro perchè i campi non sono reali. Per costruire il formalismo canonico si definiscono i momenti coniugati a partire dalla densità lagrangiana

$$\begin{cases} \pi_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\bar{\Phi}} \\ \pi_{\bar{\Phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Phi}}} = \dot{\Phi}. \end{cases} \quad (1.168)$$

Richiedendo le regole di commutazione per gli operatori $\Phi, \bar{\Phi}$

$$\left[\pi_\Phi(x), \Phi(y) \right] \Big|_{x^0=y^0} = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.169)$$

e l'analoga per $\pi_{\bar{\Phi}}(x), \bar{\Phi}(y)$, si ottengono le uniche regole di commutazione non nulle

$$\begin{cases} [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ [b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \end{cases} \quad (1.170)$$

avendo tutte le altre combinazioni di a e b commutatore nullo. Gli operatori $a^\dagger$ e $b^\dagger$, aventi queste regole di commutazione, creano stati di singola particella chiamati *particelle di tipo a* e *particelle di tipo b*, indicati rispettivamente con $a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ e $b_{\mathbf{p}'}^\dagger |0\rangle$. Tali stati risultano ortogonali fra loro, come si vede mediante il seguente sviluppo

$$\langle 0 | b_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [b_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] | 0 \rangle = 0. \quad (1.171)$$

1.10.1 Energia del campo di Klein-Gordon complesso

Con la trasformazione di Legendre costruiamoci ora l'Hamiltoniana

$$H = \int d\mathbf{x} \left(\pi_\Phi \dot{\Phi} + \pi_{\bar{\Phi}} \dot{\bar{\Phi}} - \mathcal{L} \right) = \int d\mathbf{x} \left(\dot{\bar{\Phi}} \dot{\Phi} + \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla \Phi + m^2 \bar{\Phi} \Phi \right). \quad (1.172)$$

Se sostituiamo in H le espressioni (1.167) dei campi e passiamo ai prodotti normali, otteniamo

$$H = \int d\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} \left[a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}) \right] \quad (1.173)$$

che è un risultato del tutto analogo a quello del caso reale. A questo punto si può introdurre lo stato di vuoto $|0\rangle$ in modo analogo a quello del caso reale; $|0\rangle$ è quello stato che è annichilato da tutti gli operatori di distruzione $a_{\mathbf{p}}$ e $b_{\mathbf{p}}$. Inoltre si può verificare che

$$\begin{cases} H [a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle] = \omega_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle] \\ H [b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle] = \omega_{\mathbf{k}} [b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle], \end{cases} \quad (1.174)$$

che mostrano che le particelle di tipo a e di tipo b hanno la medesima energia $\omega_{\mathbf{k}}$.

1.10.2 Carica del campo di Klein-Gordon complesso

Le particelle di tipo a e le particelle di tipo b hanno, come appena visto, la stessa energia e , come si deduce dalla lagrangiana, anche la stessa massa. Poichè però, come mostra la (1.171), esse sono rappresentate da stati mutuamente ortogonali e quindi distinti tra di loro, vogliamo stabilire come possiamo distinguerle. La risposta è che esse possono essere distinte in quanto autostati con autovalori distinti di un'osservabile ottenuta dal teorema della Noether in virtù della *simmetria interna* della lagrangiana

$$L = \int d\mathbf{x} \left(\partial_\mu \bar{\Phi} \partial^\mu \Phi - m^2 \bar{\Phi} \Phi \right) \quad (1.175)$$

espressa dalle seguenti leggi di trasformazione

$$\begin{cases} \Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x) \\ \bar{\Phi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\Phi}(x) \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.176)$$

ovvero, per α infinitesimo, dalle seguenti equazioni al primo ordine in α

$$\begin{cases} \Phi'(x) = \Phi(x) + i\alpha \Phi(x) \\ \bar{\Phi}'(x) = \bar{\Phi}(x) - i\alpha \bar{\Phi}(x) \end{cases} \quad (1.177)$$

Si vede immediatamente che tali leggi lasciano invariata l'azione, ovvero tali leggi rappresentano una simmetria. Tale simmetria è *interna* perchè non coinvolge le coordinate spaziotemporali ed è detta *trasformazione di fase globale* perchè α è costante indipendente dal punto x . Poichè questa simmetria è continua e dipende da un parametro reale α , vi saranno quindi, in virtù del teorema della Noether, una corrente conservata e una carica costante Q . Poichè la simmetria è interna si ha $\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}'(x) = 0$ e quindi

$$[\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \Phi)} \delta (\partial^\mu \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Phi}} \delta \bar{\Phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\Phi})} \delta (\partial^\mu \bar{\Phi}) = 0. \quad (1.178)$$

Utilizzando le equazioni del moto

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Phi}} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Phi})} \end{cases}, \quad (1.179)$$

otteniamo

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Phi})} \delta \bar{\Phi} \right) = 0. \quad (1.180)$$

Dalle relazioni (1.177) sviluppate al primo ordine in α possiamo ottenere le variazioni dei campi

$$\begin{cases} \delta \Phi = i\alpha \Phi \\ \delta \bar{\Phi} = -i\alpha \bar{\Phi} \end{cases} \quad (1.181)$$

Poichè α è arbitrario, otteniamo come corrente conservata la quantità

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{con} \quad J^\mu = i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Phi})} \bar{\Phi} \right) = i \left(\Phi (\partial^\mu \bar{\Phi}) - (\partial^\mu \Phi) \bar{\Phi} \right) = i \Phi \overleftrightarrow{\partial}^\mu \bar{\Phi}. \quad (1.182)$$

La carica costante è quindi data da

$$Q = \int d\mathbf{x} J^0(x) = i \int d\mathbf{x} \Phi \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 \bar{\Phi}, \quad (1.183)$$

che per essere espressa in termini di operatori a e b , deve essere ridefinita mediante prodotti ben ordinati

$$Q = \int d\mathbf{x} J^0(x) = i \int d\mathbf{x} : \Phi \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 \bar{\Phi} : . \quad (1.184)$$

Sostituendo in essa le espressioni dei campi otteniamo l'operatore di carica costante

$$Q = \int d\mathbf{p} \left[b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) \right] \quad (1.185)$$

che ha la proprietà di distinguere le particelle b dalle particelle c

$$\begin{cases} Q [a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle] = -a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle \\ Q [b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle] = b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle . \end{cases} \quad (1.186)$$

Abbiamo dimostrato dunque che gli stati ad una particella $a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ e $b_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ sono autostati dell'operatore Q aventi impulso $\mathbf{k}$, con carica rispettivamente -1 e $+1$ (data dai corrispondenti autovalori). Abbiamo pertanto creato due particelle di tipo a e b (connotate mediante gli operatori che le creano) aventi stessa massa m , come si vede dalla lagrangiana, ma carica opposta $+1$ e -1 .

Capitolo 2

Il Campo Elettromagnetico

2.1 Breve Ripasso dell'elettromagnetismo

I campi elettrico e magnetico devono soddisfare le equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & (1) & \text{Equazione di Gauss} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (2) & \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (3) & \text{Legge di Ampere} \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (4) & \text{Legge di Faraday-Neumann-Lenz} \end{cases}$$

Le equazioni (1) e (3) sono quelle che contengono la *materia*. Le equazioni (2) e (4) sono invece le cosiddette *equazioni omogenee*, cioè quelle che non contengono la materia. Il fatto che non contengono la materia deriva dal fatto che per il campo magnetico non esistono monopoli magnetici (e quindi non c'è bisogno di introdurre le densità di cariche e di correnti magnetiche). Un corpo sottoposto ad un campo elettrico e magnetico è sottoposto anche ad una forza del tipo

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (2.1)$$

Le equazioni di Maxwell sono *compatibili* fra di loro se è soddisfatta l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

che esprime la conservazione della carica. Questo vuol dire che la variazione della densità di carica in un volume finito può essere dovuto solamente ad un flusso di carica che è uscito dalla superficie che riveste il volume stesso. L'equazione di continuità può essere semplicemente ottenuta facendo la derivata nel tempo di (1) e inserendo la (3). Le equazioni omogenee possono essere risolte facilmente.

- Risolviamo la (2):

Il teorema di Clebsch ci dice che se il campo è solenoidale in uno spazio semplicemente connesso allora possiamo trovare un vettore il cui rotore è $\mathbf{B}$; questo vettore $\mathbf{A}$ è il potenziale vettore

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}}. \quad (2.3)$$

Tuttavia questa scelta per il potenziale vettore non è unica. Possiamo scegliere un altro vettore $\mathbf{A}'$ tale che soddisfi (2.3)

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \lambda(\mathbf{x}, t)} . \quad (2.4)$$

- Risolviamo la (4):

Sostituendo all'interno della (4) la (2.3) otteniamo

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \nabla \wedge \dot{\mathbf{A}} \implies \nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \right) \quad (2.5)$$

Il teorema di Poincaré ci dice che se (2.5) è verificata in una regione semplicemente connessa dello spazio, allora esiste una funzione Φ che soddisfa

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}} . \quad (2.6)$$

Il potenziale Φ è il potenziale scalare. Anche qui la scelta del potenziale non è unica

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi' - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + \frac{1}{c} \nabla \dot{\lambda} \implies \boxed{\Phi' = \Phi + \frac{1}{c} \dot{\lambda}} \quad (2.7)$$

Pertanto i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non vengono cambiati per questo tipo di trasformazioni dei potenziali e si dicono essere *Gauge invarianti*. Vedremo come la Gauge invarianza dei campi elettrico e di induzione magnetica ci danno tanti problemi quando cercheremo di quantizzare. Questo perché in meccanica quantistica le grandezze fondamentali sono quelle canoniche. Le variabili canoniche richiedono la definizione di una azione che è definita in termini di $\mathbf{A}$ e di Φ che sono soggette alle Gauge. Vedremo poi come aggirare questo tipo di problema.

2.2 Covarianza Relativistica dell'elettromagnetismo

Passiamo ora alle variabili naturali ($c = 1$). Le equazioni di Maxwell sono invarianti secondo Lorentz (che sono lineari attraverso la matrice di Lorentz). La covarianza si vede riscrivendo le equazioni in notazione quadridimensionale. Si introduce in primo luogo il *quadripotenziale*

$$\boxed{A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}} \quad (2.8)$$

La convenzione è che la parte tridimensionale coincide con le componenti controvarianti del vettore $\mathbf{A}$. Definiamo ora il *tensore elettromagnetico* in questo modo

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu} . \quad (2.9)$$

Questo tensore è antisimmetrico. Andiamo a vedere ora il significato di queste componenti

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.10)$$

Le trasformazioni di Gauge si possono scrivere in modo più comodo in questo modo

$$\boxed{A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \lambda(x)} \quad \text{Trasformazioni di Gauge per il Quadripotenziale} \quad (2.11)$$

Questa trasformazione lascia $F^{\mu\nu}$ invariato, infatti

$$F^{\mu\nu'} = \partial^\nu A^{\mu'} - \partial^\mu A^{\nu'} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \partial^\mu \lambda(x) - \partial^\mu \partial^\nu \lambda(x) = F^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

ora il teorema di Schwartz permette di invertire le derivate e rende perciò uguali gli ultimi due termini. In altre parole questo tensore ha la forma di un rotore quadrimensionale di un campo vettoriale A^μ ; i due termini finali sarebbero il gradiente di un rotore che quindi si annulla. Scriviamo ora le equazioni di Maxwell tramite il tensore elettromagnetico.

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x) \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

dove $\tilde{F}^{\mu\nu}$ è il tensore duale (pseudotensore) definito da: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ e J^μ è il quadricorrente $(\rho, \mathbf{j})$. Osserviamo che la prima equazione di Maxwell (quella inhomogenea) è perfettamente covariante per qualsiasi trasformazione di coordinate; la seconda invece, poichè richiede l'introduzione del tensore duale e quindi di poter alzare e abbassare gli indici, è covariante solo rispetto al gruppo di Lorentz. Tuttavia abbiamo visto che le equazioni di Maxwell omogenee sono automaticamente soddisfatte se definiamo il quadripotenziale (2.8). Possiamo quindi sbarazzarci della seconda equazione e utilizzare solo la scrittura di quelle di carattere non omogeneo

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = J^\mu(x)}. \quad (2.13)$$

Da questa equazione segue direttamente che la quadricorrente è conservata; ciò si può ottenere semplicemente facendo la derivata di (2.13)

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = \partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (2.14)$$

poichè il tensore elettromagnetico è antisimmetrico. Sostituendo il tensore elettromagnetico all'interno di (2.13) otteniamo le equazioni di Maxwell non omogenee scritte in funzione del quadripotenziale

$$\boxed{\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu}. \quad (2.15)$$

Classicamente si possono trovare delle semplificazioni di questa equazioni. Si può sfruttare questa arbitrarietà dei potenziali scegliendo un quadripotenziale che mi semplifichi le equazioni. La Gauge più semplice in cui si può lavorare è la gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.16)$$

Dobbiamo ora verificare che effettivamente questa è una buona scelta. Si può vedere che è sempre possibile ridursi ad un campo in gauge di Lorenz, pur di effettuare una trasformazione di gauge con Λ soluzione di

$$\partial_\mu A^{\mu'} = \partial_\mu A^\mu + \square \Lambda = 0 \implies \square \Lambda = -\partial_\mu A^\mu(x) \quad (2.17)$$

Questa è una equazione risolubile in quanto sappiamo le funzioni di Green per l'equazione di Klein-Gordon; l'unica differenza è che dobbiamo porre $m = 0$.

$$\Lambda(x) = \Lambda_0(x) - \int d^4y G(x-y) \partial_\mu A^\mu(y) \quad (2.18)$$

dove A_0 è una soluzione qualsiasi dell'equazione omogenea associata (equazione di D'Alembert). Non solo ce n'è una di soluzione, ce ne sono infinite. Quindi se ho delle configurazioni in cui i potenziali non soddisfano la (2.16) allora posso effettuare una trasformazione di Gauge tale che il nuovo potenziale la soddisfa. La soluzione delle equazioni di Maxwell (2.15) con la scelta di Gauge (2.16) ora è semplice da trovare

$$A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + \int d^4y G(x-y) J^\mu(y) \quad (2.19)$$

dove A_0^μ è una soluzione dell'equazione omogenea, mentre $G(x-y)$ è la funzione di Green (che soddisfa $\square G(x-y) = \delta^4(x-y)$). Questa soluzione rappresenta la somma di una onda elettromagnetica che si propaga *liberamente* (termine A_0^μ) e di un'onda elettromagnetica generata dalle *sorgenti* (densità di carica e densità di corrente elettrica). Questa equazione però non risolve completamente il problema dell'elettrodinamica. Questo perchè abbiamo assunto che le sorgenti $J^\mu(x)$ sono assegnate; il problema è che in generale non lo sono in quanto, sotto l'azione del campo elettrico e magnetico che esse stesse hanno generato, si muoveranno cambiando la condizione iniziale che abbiamo dato. Tuttavia è buona l'approssimazione in tutti quei problemi in cui le sorgenti sono fissate, ad esempio la trasmissione radio (questa equazione risolve tutti i problemi elettrotecnici di progettazione delle antenne: per ogni disposizione dell'antenna si può calcolare il campo elettrico e magnetico). Il problema di risoluzione a sorgenti che cambiano disposizione nel tempo per effetto stesso del campo, è un problema non banale, sia classicamente che quantisticamente (QED). Bisogna ricorrere in entrambi i casi a dei metodi approssimati.

2.3 Il Campo Elettromagnetico Libero

Ora siamo interessati a riprodurre il campo elettromagnetico libero per poi passare a quantizzarlo. Per *campo elettromagnetico libero* si intende un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio alla velocità della luce in assenza di cariche e correnti ($J^\mu = 0$). Nei prossimi capitoli inoltre, introdurremo il *campo della materia libero* (elettroni liberi) in modo tale da farli interagire insieme. Vedremo come il campo elettromagnetico si propaga per pacchetti di energia, impulso e di momento angolare che sono i *fotoni*.

2.3.1 Gauge di Coulomb

Nel descrivere il campo elettromagnetico libero non useremo come scelta di gauge la condizione di Lorenz (2.16) perchè richiede nella quantizzazione dell'introduzione di due tipi di fotoni non fisici di cui poi ci dovremo sbarazzare (si può fare ma è molto complicato). La gauge che utilizzeremo è quella di Coulomb (altrimenti detta gauge di radiazione)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.20)$$

Il problema principale della gauge di radiazione (2.20) è che non è covariante sotto trasformazioni di Lorentz; in altre parole, se effettuiamo una trasformazione di Lorentz il nuovo potenziale non soddisferà la gauge di Coulomb (2.20). Tuttavia questo è un problema di poco conto in quanto è vero che abbiamo dei problemi di covarianza per i potenziali, ma le quantità fisiche come il campo elettrico e magnetico, che non dipendono dalla scelta della gauge, continuano a restare covarianti. Cerchiamo ora di capire se effettivamente è sempre possibile mettersi nella gauge di radiazione; sia

quindi A^μ tale che la 2.20 non è soddisfatta. Ci chiediamo quindi se $\exists A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ tale che $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Lambda = 0 \implies \nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.21)$$

ovvero l'equazione di Poisson che è risolvibile

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{y} \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (2.22)$$

Notare che la funzione $(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{-1}$ è la funzione di Green del Laplaciano (per la dimostrazione, vedi Patri, pag 162). Andiamo ora a vedere cosa succede alle equazioni di Maxwell (2.15) con $J^\mu = 0$ e scritte nella gauge di Coulomb

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_0 A^0) = 0. \quad (2.23)$$

Queste sono 4 equazioni, una per ogni componente di μ . Guardiamo ora separatamente la componente temporale e spaziale

$$\begin{cases} \square A^0 - \partial_0^2 A^0 = 0 \\ \square A^i - \partial^i (\partial_0 A^0) = 0 \end{cases} \implies \nabla^2 A^0 = 0 \quad (2.24)$$

La prima equazione ci dice che A^0 deve essere una funzione armonica in tutto lo spazio. Tuttavia A^0 va a 0 all'infinito e quindi se si annulla in qualche punto dello spazio, si deve annullare in tutto lo spazio. Da qui segue l'importante semplificazione della gauge di Coulomb

$$\boxed{A^0 = 0} \quad \text{con} \quad J^\mu = 0. \quad (2.25)$$

La seconda equazione invece ci dice che ogni componente del potenziale vettore deve soddisfare l'equazione di D'Alembert (equazione di Klein-Gordon a massa nulla)

$$\square A^i = 0. \quad (2.26)$$

Ricapitolando le equazioni di Maxwell nella gauge di Coulomb e in assenza di cariche diventano

$$\begin{cases} \partial_i A^i = 0 & \text{Gauge di Coulomb} \\ J^\mu = 0 & \text{Campo Elettromagnetico Libero} \end{cases} \implies \begin{cases} A^0 = 0 \\ \square A^i = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

2.3.2 Soluzione Classica

Procediamo al trovare una soluzione dell'equazione (2.26). Ricordandoci l'espressione della soluzione dell'equazione di Klein-Gordon, e ponendo $m = 0$ otteniamo

$$A^i(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p}} (\alpha^i(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \alpha^{*i}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}). \quad (2.28)$$

Notare che poichè il campo elettromagnetico è reale, il secondo termine nella somma è il complesso coniugato del primo. Ora impongo che la divergenza sia uguale a 0

$$\partial_i A^i = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p}} (\alpha^i(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} (-ip_i) + \alpha^{*i}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} (ip_i)) = 0 \quad (2.29)$$

da cui segue che il vincolo da rispettare è

$$p_i \alpha^i(\mathbf{p}) = 0. \quad (2.30)$$

Questa è equivalente alla condizione della gauge di Coulomb. È conveniente risolvere questa condizione introducendo due vettori $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, 1)$ e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, 2)$ con le seguenti proprietà

$$\begin{cases} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\beta = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, \beta) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, \gamma) = \delta_{\beta\gamma} \end{cases} \quad \text{con } \beta, \gamma = 1, 2 \quad (2.31)$$

ovvero tali che la terna $\mathbf{p}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, 1), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, 2)$ sia una terna ortornormale destrorsa. Tenendo conto del vincolo (2.30), possiamo espandere gli $\alpha^i(\mathbf{p})$ nella base degli $\boldsymbol{\varepsilon}^\beta$ con dei determinati coefficienti $a^i(\mathbf{p})$

$$\alpha^i(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^2 a_\lambda(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, \lambda). \quad (2.32)$$

Otteniamo infine

$$A^i(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p}} (a_\lambda(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + a_\lambda^*(\mathbf{p}) \varepsilon^{*i}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}). \quad (2.33)$$

Quindi in questa forma (avendo imposto un vincolo di trasversalità) le tre componenti del potenziale vettore dipendono solo da due numeri complessi. I vettori $\boldsymbol{\varepsilon}$ possono essere presi anche reali. La soluzione corrispondente per volume finito è

$$A^i(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2pV}} (a_\lambda(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + a_\lambda^*(\mathbf{p}) \varepsilon^{*i}(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}). \quad (2.34)$$

Le $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ rappresentano le direzioni in cui oscillano il campo elettrico e il campo magnetico. Vediamolo prendiamo per semplicità come direzione di $\mathbf{p}$ quella dell'asse z . Esplicitando i prodotti scalari quadridimensionali agli esponenziali per questo particolare caso, possiamo trovare il campo elettrico e magnetico tramite le equazioni (2.6) e (2.3) ma con $A^0 = 0$. Il campo elettrico in questo caso oscilla nella stessa direzione di $\mathbf{A}$ (perché nella derivata temporale viene tirato giù un fattore ip_z). La direzione del campo magnetico rimane nel piano delle ε_λ ma ortogonale alla direzione del campo elettrico. Infatti dall'identità vettoriale $\nabla \wedge (\varepsilon^i(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip_z z}) = \nabla e^{-ip_z z} \wedge \varepsilon^i(\mathbf{p}, \lambda)$ (il rotore di $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ è 0) si vede che il gradiente è parallelo alla direzione di p_z . In generale il campo elettrico e magnetico oscilleranno in direzioni combinazioni lineari di $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$. Se le a fossero complesse e non più reali si vedrebbe che il campo elettrico e magnetico oscillano sempre in questo piano, ma ruotano uniformemente in esso: otteniamo delle polarizzazioni circolari destra e sinistra.

Per effettuare una descrizione quantistica del campo elettromagnetico libero abbiamo bisogno di identificare il formalismo canonico e l'azione delle equazioni di Maxwell. Il formalismo canonico come già detto non può essere costruito con i campi elettrici e magnetici ma con il quadripotenziale. Costruiamo ora il formalismo Lagrangiano dell'elettromagnetismo.

2.3.3 Teoria Lagrangiana del Campo Elettromagnetico Libero

La densità lagrangiana del campo elettromagnetico libero è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

L'azione è un funzionale delle A^μ

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (2.36)$$

Premettiamo che l'azione del campo elettromagnetico non libero richiede l'aggiunta di un fattore $-J_\mu A^\mu$ (per esempio si può descrivere il moto di elettroni in presenza di un campo elettromagnetico)

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right). \quad (2.37)$$

Verifichiamo ora che la variazione dell'azione (con cariche esterne) effettivamente produca le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - J_\mu \delta A^\mu \right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial^\nu \delta A^\mu - \partial^\mu \delta A^\nu) - J_\mu \delta A^\mu \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial^\nu F_{\mu\nu} \delta A^\mu - \partial^\mu F_{\mu\nu} \delta A^\nu) - J_\mu \delta A^\mu \right) = \int d^4x (\partial^\nu F_{\mu\nu} - J_\mu) \delta A^\mu = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

avendo utilizzato una integrazione per parti e l'antisimmetria del tensore elettromagnetico. Per l'arbitrarietà della variazione segue che devono essere soddisfatte le equazioni di Maxwell che contengono la materia; come già detto in precedenza, le altre equazioni di Maxwell sono automaticamente soddisfatte in quanto abbiamo imposto che $F^{\mu\nu}$ sia il quadrirotore del potenziale.

Possiamo effettuare una trasformazione di Legendre e passare al formalismo Hamiltoniano

$$H = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right) = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} \dot{A}_i - \mathcal{L} \right). \quad (2.39)$$

Riscriviamo la lagrangiana in una altra forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \quad (2.40)$$

poichè nella gauge di Coulomb si ha che $\dot{A}_i = -E_i$. Per lo stesso motivo l'Hamiltoniana assumerà la forma

$$H = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i} E_i - \mathcal{L} \right) = \int d\mathbf{x} \left(-E^i E_i - \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} E^2 \right) = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (E^2 + B^2). \quad (2.41)$$

2.4 Quantizzazione del Campo Elettromagnetico Libero

Cerchiamo ora di arrivare ad una teoria quantizzata del campo elettromagnetico. Per prima cosa dobbiamo calcolarci la densità dei momenti coniugati

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}. \quad (2.42)$$

Notiamo che, se usiamo la (2.35), la componente temporale di questo quadrirotore si annulla

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} \equiv 0. \quad (2.43)$$

Questo comporta dei problemi in quanto non possiamo più imporre le relazioni di commutazioni tra il campo e i momenti coniugati. D'altra parte questo è, se non altro, prevedibile, in quanto, se il formalismo canonico fosse completamente applicabile potremmo predire con certezza l'evoluzione completa del campo A^μ , mentre abbiamo visto che è possibile perturbare tale evoluzione effettuando, a qualunque istante del tempo una trasformazione di gauge. Non basta quindi assegnare le condizioni iniziali: la soluzione, a causa delle gauge, non è unica. Quindi il formalismo canonico per questo problema di Cauchy è mal posto. La scorciatoia che possiamo usare è che sappiamo come quantizzare il campo scalare. Quindi saltiamo il problema del formalismo canonico e imponiamo che le a e le $a^\dagger$ siano degli operatori (di creazione e annichilazione) che soddisfano delle ben precise relazioni di commutazione. Questi operatori *sono* il campo; in altre parole il campo si propaga a pacchetti di energia e impulso come se fossero particelle quantistiche. I modi di oscillazione del campo sono quello che chiamiamo particelle. Le relazioni di commutazione che imponiamo saranno

$$[a_\lambda(\mathbf{p}), a_{\lambda'}(\mathbf{p})] = 0, \quad [a_\lambda(\mathbf{p}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.44)$$

Il campo diventa pertanto

$$A^j(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p}} (a_\lambda(\mathbf{p}) \varepsilon^j(\mathbf{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \varepsilon^j(\mathbf{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}). \quad (2.45)$$

Si può verificare che inserendo all'interno di (2.41) l'espressione (2.45), l'energia assume la seguente forma

$$E = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (:E^2: + :B^2:) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) a_\lambda(\mathbf{p}) \quad \text{con } \omega_{\mathbf{p}} \equiv |\mathbf{p}| \quad (2.46)$$

dove abbiamo eliminato l'energia di punto zero attraverso il buon ordinamento. Otteniamo una espressione che rappresenta l'energia di un sistema di oscillatori armonici indipendenti. Anche nel caso del campo elettromagnetico esiste quindi uno stato $|0\rangle$ definito dalla condizione

$$a_\lambda(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{p}, \lambda. \quad (2.47)$$

Gli stati eccitati hanno la stessa interpretazione che nel caso del campo scalare: ad esempio in uno stato $a_\lambda^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ è presente un fotone con impulso $\mathbf{p}$, energia $\omega_{\mathbf{p}}$ e polarizzazione lungo $\varepsilon(\mathbf{p}, \lambda)$. Per costruzione abbiamo ottenuto che il campo elettromagnetico è equivalente a 2 oscillatore armonico per ogni valore di $\mathbf{p}$; a differenza del campo scalare in cui avevamo un solo grado di libertà, qui ne abbiamo 2. Da dove vengono questi gradi di libertà? Classicamente questi corrispondevano alla polarizzazione, quantisticamente corrisponde allo spin. In realtà lo spin del fotone è 1 però esistono solo due stati di spin indipendenti: ciò è dovuto al fatto che la massa del fotone è nulla. Le particelle di massa nulla per qualsiasi valore dello spin della particella ha solo due gradi di libertà. Lo rivedremo in seguito.

2.5 Quantità Conservate

Il teorema di Noether richiede l'azione ma non richiede un formalismo canonico, cosa che ancora non abbiamo costruito. Possiamo quindi dedurre delle quantità conservate.

2.5.1 Traslazioni

Sotto traslazioni $x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu$ abbiamo visto che il campo scalare cambia così: $\Phi'(x') = \Phi(x)$. Questo rimane vero per ogni componente del campo vettoriale A^μ

$$A^{\mu'}(x') = A^\mu(x), \quad \forall \mu \quad (2.48)$$

Otteniamo quindi come tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_i} \partial^\nu A_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.49)$$

poichè dobbiamo quando abbiamo più campi dobbiamo sommare su tutti i campi i . Lungo le equazioni del moto $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Abbiamo quindi 4 quantità conservate

$$P^\nu = \int d\mathbf{x} T^{0\nu} \quad (2.50)$$

Partiamo con l'esaminare la parte spaziale

$$\begin{aligned} P^k &= \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} \partial^k A_i \right) = - \int d\mathbf{x} E^i (\partial^k A_i - \partial_i A^k) = \int d\mathbf{x} E^i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \right) \\ &= \int d\mathbf{x} \epsilon^k_{ij} E^i B^j = \int d\mathbf{x} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^k \end{aligned} \quad (2.51)$$

che è il vettore di Poynting, che rappresenta l'impulso del campo elettromagnetico. Ora esaminiamo la parte temporale

$$P^0 = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} \partial^0 A_i - \mathcal{L} \right) \quad (2.52)$$

per definizione si ha che $\partial^0 A_i = \partial_i A^0 - F^0_i$; integrando per parti si ottiene

$$P^0 = \int d\mathbf{x} \left(E^2 + (\partial_i E^i) A^0 - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \right) = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (E^2 + B^2). \quad (2.53)$$

Notiamo che è l'espressione dell'energia trovata in precedenza. Si può raggiungere questo risultato utilizzando la gauge di Coulomb e annullando quindi A^0 . Ora cerchiamo l'espressione quantistica delle quantità conservate che abbiamo ricavato. Quella relativa all'energia l'avevamo già ricavata in precedenza e la riscriviamo qui per completezza

$$E = \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{p}) a_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad \text{con } \omega_{\mathbf{p}} \equiv |\mathbf{p}| \quad (2.54)$$

Per quanto riguarda il vettore di Poynting invece otteniamo

$$\mathbf{P} = \sum_{\lambda=1}^2 \int d\mathbf{p} \mathbf{p} a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{p}) a_{\lambda}(\mathbf{p}) \quad (2.55)$$

2.5.2 Rotazioni

Riscriviamo qui per semplicità la legge generale di conservazione che ci eravamo ricavati nel primo capitolo

$$\partial^\mu \mathcal{M}^{\sigma\rho}_\mu = 0 \quad \text{con} \quad \boxed{\mathcal{M}^{\sigma\rho}_\mu = (x^\rho T^\sigma_\mu - x^\sigma T^\rho_\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_a} M^{\rho\sigma}_{ab} \varphi_b(x)} . \quad (2.56)$$

Mentre per il campo scalare M si annullava, adesso è diversa da 0 in quanto il quadripotenziale (che è un campo vettoriale) si trasforma in questo modo

$$A^{\alpha'}(x') = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta(x) \quad (2.57)$$

per trasformazioni di Lorentz. Cerchiamo l'espressione di M nel caso del campo elettromagnetico

$$\varphi'_a(x') = S_{a,b}(\Lambda) \varphi_b(x) \quad \text{con} \quad S_{a,b} \approx \delta_{ab} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}_{ab} . \quad (2.58)$$

In primo luogo scriviamo la definizione di ε^α_β

$$\Lambda^\alpha_\beta \approx \delta^\alpha_\beta + \varepsilon^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + g^{\mu\alpha} \varepsilon_{\mu\nu} g^\nu_\beta \quad (2.59)$$

avendo interpretato l'indice a e b di M con gli indici spaziotemporali α e β . Richiedendo che M sia antisimmetrica in μ e ν troviamo

$$\begin{aligned} \Lambda^\alpha_\beta &\approx \delta^\alpha_\beta + \varepsilon_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta) + \frac{1}{2} (g^\mu_\alpha g^\nu_\beta + g^\nu_\alpha g^\mu_\beta) \right) \\ &= \delta^\alpha_\beta + \varepsilon_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

sopravvive solo il termine antisimmetrico perchè il termine simmetrico si elimina nella contrazione con $\varepsilon_{\mu\nu}$. Otteniamo l'espressione per M

$$\boxed{M^{ij}_{ab} = g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta} \quad (2.61)$$

PRIMO CASO: $\rho = i, \sigma = j$

Nel caso del campo elettromagnetico abbiamo come quantità conservata

$$\mathcal{M}^{ij} = \int d\mathbf{x} \left[(x^i T^j_0 - x^j T^i_0) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha} M^{ij}_{\alpha\beta} A_\beta \right] \quad (2.62)$$

dove la prima parentesi rappresenta il momento angolare orbitale e il secondo addendo invece è il momento angolare intrinseco o di spin. L'espressione scritta sopra quindi è il momento angolare totale del sistema

$$\mathcal{J}^k = \varepsilon^k_{ij} \mathcal{M}^{ij} \quad (2.63)$$

Possiamo ottenere il caso quantistico dobbiamo sostituire all'interno della precedente equazione l'espressione del quadripotenziale espresso con gli operatori di creazione e di distruzione. Cerchiamo ora lo spin da associare alle particelle del campo elettromagnetico. La parte di momento angolare orbitale è equivalente a quella del campo scalare

$$\mathcal{M}^{ij} = i \int d\mathbf{p} \left(\nabla^i_{\mathbf{p}} p^j - \nabla^j_{\mathbf{p}} p^i \right) a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad (2.64)$$

Nel caso del campo scalare il momento angolare a riposo (che è ciò che chiamiamo spin) è zero. Però se la particella ha massa nulla questa definizione non funziona. Come faccio a definire il momento angolare intrinseco senza la costrizione di misurare il momento angolare a riposo? Il trucco è quello di proiettare il momento angolare totale lungo la direzione del moto (direzione dell'impulso) e ottenere quella che si chiama l'*elicità*. Per il momento angolare orbitale questa proiezione darebbe 0, poichè classicamente $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) = 0$. Quindi avendo l'espressione del momento angolare *totale* possiamo cancellare la parte di momento angolare orbitale proiettando lungo la direzione dell'impulso. Anche a livello quantistico ciò è vero perchè nel prodotto misto le 3 componenti hanno indici tutti diversi e quindi commutano tra di loro; possiamo scriverlo infatti con il simbolo di Levi-Civita $\epsilon_{ijk} p^i x^j p^k$. Tutto ciò vale anche nella seconda quantizzazione in quanto se immaginiamo una particella con impulso lungo z allora la proiezione del momento angolare orbitale lungo questo asse è 0 (come si può vedere dalla precedente equazione). Perchè lo spin non venga modificato da questo tipo di operazione bisogna però verificare che non si hanno componenti di spin trasverse alla direzione del moto. Si può dimostrare, infatti, che per particelle di massa nulla lo spin può avere componenti o lungo il moto o opposto alla direzione del moto. Quindi le particelle di spin 1 dovrebbero avere 3 componenti lungo la direzione del moto, invece ve ne sono solo 2. Se la particella avesse spin 10 ad esempio le componenti lungo la direzione del moto rimarrebbero comunque 2: ± 10 .

Questo discorso si può vedere a livello matematico costruendo per i fotoni uno stato del tipo $(a_1^\dagger(\mathbf{p}) \pm a_2^\dagger(\mathbf{p}))|0\rangle$. Calcolando l'elicità

$$\frac{(\mathcal{J}^k p^k)}{p} (a_1^\dagger(\mathbf{p}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{p}))|0\rangle = \pm (a_1^\dagger(\mathbf{p}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{p}))|0\rangle \quad (2.65)$$

dove p è il modulo dell'impulso e $\mathcal{J}^k p^k$ è il prodotto scalare tridimensionale tra il momento angolare e l'impulso. Otteniamo per questo stato autovalori ± 1 . Questo stato quindi rappresenta un fotone con momento $\mathbf{p}$ ed elicità ± 1 . Lo spin del fotone è quindi 1. Il *teorema di Wigner* afferma che per particelle relativistiche di massa nulla le uniche componenti dell'elicità che possono sopravvivere sono la massima proiezione o la minima proiezione lungo la direzione del moto.

SECONDO CASO: $\rho = i$, $\sigma = 0$

Non aggiunge molto alla trattazione già fatta per il campo scalare.

2.6 Campo elettromagnetico trasportato dai fotoni

Utilizzando gli stati ad un numero finito n di fotoni vogliamo dimostrare che un fissato numero di fotoni non porta nè un campo elettrico nè un campo magnetico. Infatti è immediato verificare che il valor medio di $\mathbf{E}$ sullo stato ad n fotoni risulta nulla, ovvero

$$\langle 0 | a_{r_1}(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}(\mathbf{p}_n) \mathbf{E}(x) a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}^\dagger(\mathbf{p}_n) | 0 \rangle = 0. \quad (2.66)$$

Infatti dalla relazione $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ segue che il campo elettrico $\mathbf{E}$ è combinazione di operatori $a_r(\mathbf{p})$, $a_r^\dagger(\mathbf{p})$ e quindi gli stati $a_r(\mathbf{p}) a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}^\dagger(\mathbf{p}_n) | 0 \rangle$, $a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}^\dagger(\mathbf{p}_n) | 0 \rangle$ sono sempre ortogonali allo stato $\langle 0 | a_{r_1}(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}(\mathbf{p}_n)$. Poichè si ha $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, segue che anche $\mathbf{B}$ è combinazione

lineare di operatori $a_r(\mathbf{p})$, $a_r^\dagger(\mathbf{p})$ e quindi anche il valor medio di $\mathbf{B}$ calcolato sullo stato a n fotoni risulta nullo, ovvero

$$\langle 0 | a_{r_1}(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}(\mathbf{p}_n) \mathbf{B}(x) a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}^\dagger(\mathbf{p}_n) | 0 \rangle = 0. \quad (2.67)$$

Poichè quindi su di esso il campo elettrico e magnetico hanno valor medio nullo, concludiamo che uno stato con n fotoni non può essere un'onda elettromagnetica. Quando si parla di fotoni di impulso dato ben definito, si intende sempre una *sorgente laser* (monocromatica), ma nella realtà il numero dei fotoni non è fissato perchè sebbene non si tratti di un problema di conteggio, si ha che quantisticamente il loro numero non può essere definito perchè, come detto, su uno stato con n fotoni il valor medio del campo risulta nullo. Consideriamo uno stato con un numero di fotoni non definito, come ad esempio

$$|\psi\rangle = c_n |\alpha_n\rangle + c_{n+1} |\alpha_{n+1}\rangle \quad (2.68)$$

dove c_n, c_{n+1} sono opportune costanti di normalizzazione e $|\alpha_n\rangle = a_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a_{r_n}^\dagger(\mathbf{p}_n) | 0 \rangle$. Ci si può rendere facilmente conto che su tale stato il valor medio del campo A e la sua derivata $\dot{A}$ risultano diversi da zero. In particolare, in ottica quantistica si considera lo stato detto *stato coerente* che è un autostato dell'operatore di abbassamento dell'oscillatore armonico. Poichè uno stato coerente risulta una sovrapposizione infinita di stati con un numero via via crescente di particelle, anche su di esso il valor medio del campo elettrico e del campo magnetico risulta diverso da zero. Uno stato coerente è pertanto

$$|\psi_c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\alpha_n\rangle. \quad (2.69)$$

Uno stato con infiniti fotoni aventi una ben precisa polarizzazione fornisce una luce monocromatica in un determinato stato di polarizzazione e quindi di spin.

Capitolo 3

Il Campo Di Dirac

3.1 L'equazione di Dirac

Studiamo ora l'equazione che descrive i campi fermionici di spin $1/2$. Dirac pensava di scrivere una equazione simile a quella di Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$. Il problema dell'equazione di Klein-Gordon era la presenza di una forte asimmetria rispetto alle derivate spaziali e temporali. Allora Dirac si immaginò di scrivere l'Hamiltoniana come un operatore con una derivata spaziale del primo ordine. Questa forma sappiamo non vale nel caso non relativistico in quanto abbiamo un laplaciano. Ma nel limite relativistico, poichè spazio e tempo si mescolano diventando un tutt'uno, ci aspettiamo una certa simmetria. Postulò una equazione avente questa forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta] \psi \quad (3.1)$$

dove ovviamente $\mathbf{p}$ non può comparire con una sola componente perchè, non essendoci una direzione privilegiata nello spazio, si violerebbe l'invarianza per rotazioni : questo è il significato del prodotto scalare con $\boldsymbol{\alpha}$. In questa equazione $\boldsymbol{\alpha}$ e β sono 4 operatori adimensionali (da qui i fattori c e c^2 che poi elimineremo passando ad unità naturali), agenti su uno spazio diverso da quello delle coordinate spaziotemporali (altrimenti l'equazione non sarebbe più del primo ordine nello spazio e nel tempo). Abbiamo implicitamente aggiunto un grado di libertà effettuando un prodotto tensoriale. Immaginiamo quindi che la ψ , funzione dello spazio e del tempo, sia in realtà dipendente anche da un altro argomento su cui operano $\boldsymbol{\alpha}$ e β . Ci immaginiamo in altre parole che $\boldsymbol{\alpha}$ e β siano matrici in uno spazio di cui ψ porterà gli indici; queste quantità, essendo state aggiunte tramite un prodotto tensoriale, commutano con le variabili di spazio e tempo x e t .

Vogliamo ora ricavarci una forma delle $\boldsymbol{\alpha}$ e β . Per prima cosa supponiamo che essi siano matrici agenti su vettori colonna di uno spazio vettoriale a N dimensioni. Conosciamo già una equazione relativisticamente invariante: l'equazione di Klein-Gordon. Possiamo provare ad iterare l'equazione di Dirac tramite $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e richiedere che ogni componente ψ_i soddisfi l'equazione di Klein-Gordon

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta) (c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta) \psi \quad (3.2)$$

sostituendo l'espressione dell'operatore impulso e svolgendo i prodotti otteniamo

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \left(-\hbar^2 c^2 \alpha^i \alpha^j \partial_i \partial_j - i\hbar m c^3 \alpha^i \beta \partial_i - i\hbar m c^3 \beta \alpha^i \partial_i + m^2 c^4 \beta^2 \right) \psi \\ &= \left(-\hbar^2 c^2 \alpha^i \alpha^j \partial_i \partial_j - i\hbar m c^3 \{\alpha^i, \beta\} \partial_i + m^2 c^4 \beta^2 \right) \psi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Imponiamo ora che tale equazione sia l'equazione di Klein-Gordon. Affinchè ciò avvenga si deve avere

- Gli operatori α^i e β anticommutano: $\boxed{\{\alpha^i, \beta\} = 0}$;
- Poichè $\partial_i \partial_j$ è un operatore simmetrico, nel prodotto con l'operatore nè simmetrico nè anti-simmetrico $\alpha^i \alpha^j = \frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j - \alpha^j \alpha^i) + \frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i)$ sopravviverà solo la parte simmetrica. Deve essere pertanto $\frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) = \mathbb{I} \delta_{ij}$, in modo tale da avere $-\hbar^2 c^2 \delta_{ij} \partial_i \partial_j = -\hbar^2 c^2 \Delta$.

$$\boxed{\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}} \implies \{\alpha^i, \alpha^i\} = 2(\alpha^i)^2 = 2\mathbb{I} \implies \boxed{(\alpha^i)^2 = \mathbb{I}}$$

- $\boxed{\beta^2 = \mathbb{I}}$.

$\mathbb{I}$ è l'operatore identità nello spazio in cui questi oggetti operano. Quindi gli autovalori di α^i e β possono essere ± 1 . Poichè inoltre l'Hamiltoniana del sistema è un operatore hermitiano, anche gli operatori α^i e β sono hermitiani. Possiamo ora chiederci quale sia la dimensione minima che deve avere lo spazio in cui operano le matrici α^i e β , affinchè tali matrici possano esistere e soddisfare le relazioni precedentemente trovate. Sfruttando queste proprietà troviamo

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \implies \beta \alpha^i \beta = -\alpha^i \implies \text{Tr}(\beta \alpha^i \beta) = -\text{Tr}(\alpha^i). \quad (3.4)$$

Possiamo ora utilizzare l'invarianza della traccia per una permutazione ciclica delle matrici

$$\text{Tr}(\beta \alpha^i \beta) = \text{Tr}(\alpha^i \beta^2) = \text{Tr}(\alpha^i) = -\text{Tr}(\alpha^i) \quad (3.5)$$

da cui segue

$$\text{Tr}(\alpha^i) = 0 \quad (3.6)$$

Sfruttando la relazione $\beta = -\alpha^i \beta \alpha^i$ si trova l'analoga equazione per β

$$\text{Tr}(\beta) = 0. \quad (3.7)$$

Abbiamo a che fare con un set di 4 matrici a traccia (che è invariante sotto trasformazione unitaria) nulla. Poichè gli autovalori di questi operatori possono essere ± 1 , la dimensione N dello spazio sul quale agiscono deve essere per forza *pari* (devono contenere tanti 1 quanti -1).

Volendo identificare lo spazio di dimensione minima su cui agiscono questi operatori, iniziamo esaminando il caso $N = 2$. Vogliamo quindi 4 matrici 2×2 che anticommutano fra di loro. Ma nello spazio delle matrici 2×2 posso prendere come base le 3 matrici di Pauli e l'identità. Sembra andare tutto bene perchè le matrici di Pauli anticommutano tra di loro $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}$. Il problema è che in due dimensioni non ci sono 4 matrici che anticommutano, ma solo 3. Importante qui rimarcare che stiamo descrivendo una particella con massa m (non ancora verificato!); se la

massa fosse 0 avrei da determinare solo 3 matrici che anticommutano fra di loro (non esisterebbe la β) e in 2 dimensioni ce la farei: questo argomento è ciò che porterà all'equazione di Weil. La dimensione minima affinché possano esistere le matrici α^i e β è 4. Se identifichiamo con il simbolo $\mathbb{I}$ l'identità 2×2 possiamo scrivere le matrici che stiamo cercando in questo modo

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Si può verificare che queste due matrici soddisfano l'algebra definita prima da $\{\alpha^i, \beta\} = 0$ e $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}$ (in questi casi $\mathbb{I}$ è intesa come identità 4×4). L'unica arbitrarietà rimasta nelle matrici consiste nella possibilità di effettuare una trasformazione unitaria. Non esistono altre possibilità (non lo dimostreremo). Il fatto che l'arbitrarietà sia nelle trasformazioni unitarie risiede nel fatto che l'anticommutatore è invariante per trasformazioni unitarie U .

3.2 Covarianza dell'equazione di Dirac

Dobbiamo ora convincerci che l'equazione di Dirac è relativisticamente covariante. Finora, infatti abbiamo verificato che la sua iterazione è relativisticamente covariante in quanto ci si può ricondurre all'equazione di Klein-Gordon componente per componente. Per semplicità, ora, torniamo al sistema di unità naturali $\hbar = c = 1$. L'equazione di Dirac diventa

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m \beta \right) \psi. \quad (3.9)$$

Ora moltiplico l'equazione per la matrice β . Questa operazione è lecita in quanto facendo ciò non perdiamo informazione (β non è un proiettore e quindi non vado a cadere in uno spazio più piccolo di quello di partenza). La matrice β infatti è invertibile $\beta^{-1} = \beta$ (per un proiettore w si avrebbe $w^2 = w$). Effettuando questa operazione otteniamo

$$i \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \beta \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m \right) \psi \quad (3.10)$$

Poniamo ora

$$\begin{cases} \gamma^0 = \beta & \text{Hermitiana : } \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^i = \beta \alpha^i & \text{Antihermitiane : } \gamma^{i\dagger} = \alpha^i \beta = -\beta \alpha^i = -\gamma^i \end{cases} \quad (3.11)$$

Le matrici γ^μ hanno questa espressione

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Le regole di commutazione per α^i e β , diventano, in termini di γ^μ

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= \{\beta, \beta \alpha^i\} = \beta \beta \alpha^i + \beta \alpha^i \beta = \alpha^i - \alpha^i = 0 \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= \beta \alpha^i \beta \alpha^j - \beta \alpha^j \beta \alpha^i = -\{\alpha^i, \alpha^j\} = -2\delta^{ij} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Possiamo riscrivere l'equazione di Dirac nella forma

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0. \quad (3.14)$$

Se introduciamo la notazione di Feynman

$$\not{v} = \gamma^\mu v_\mu \quad (3.15)$$

possiamo riscrivere l'equazione di Dirac in un altro modo

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (3.16)$$

Il problema è che γ^μ *non* sono le componenti di un quadrivettore, quindi non dobbiamo lasciarci ingannare dal fatto che abbiamo due indici saturati (che ci indurrebbero a dire direttamente che l'equazione è relativisticamente covariante). Se vogliamo studiarne la covarianza dobbiamo, come sempre, ipotizzare di avere due riferimenti O e O' collegati da una trasformazione di Lorentz $x' = \Lambda x$. La $\psi(x)$ è un oggetto che ha 4 componenti, ma *non* è un quadrivettore, in quanto non si trasforma come tale (in realtà è uno *spinore* un oggetto *assoluto* come i vettori e i quadrivettori). Se $\psi(x)$ risolve l'equazione di Dirac per un osservatore O , ci chiediamo se esiste una $S(\Lambda)$ tale che

$$\psi'_a(x') = S_{a,b}(\Lambda) \psi_b(x) \quad (3.17)$$

risolva l'equazione di Dirac in O'

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'^\mu} - m\psi'(x') = 0. \quad (3.18)$$

I γ^μ non hanno indici $'$ in quanto sono funzioni delle α^i e delle β , e queste sono invarianti per trasformazioni unitarie. Poichè stiamo facendo una meccanica quantistica, possiamo far seguire o precedere la trasformazione indotta da S da una qualsiasi trasformazione unitaria. Con questa trasformazione unitaria (sotto le quali la meccanica quantistica è invariante) possiamo riportare i γ' nei γ precedenti. Possiamo quindi identificare le γ^μ in tutti i sistemi di riferimento. Questo ci fa ben capire ancora come le componenti di γ non siano quelle di un quadrivettore. Possiamo quindi inserire γ^μ anzichè γ'^μ in quanto la matrice S può inglobarsi la trasformazione unitaria.

La matrice $S_{a,b}(\Lambda)$ deve essere invertibile e quindi possiamo scrivere

$$\psi_b(x) = S_{a,b}^{-1}(\Lambda) \psi'_a(x') \quad (3.19)$$

Sostituendo nell'equazione di Dirac troviamo

$$i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') - m S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = 0. \quad (3.20)$$

Moltiplicando a sinistra per $S(\Lambda)$ e notando che ∂_μ non agisce su S abbiamo

$$i S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi'(x') - m \psi'(x') = 0 \quad (3.21)$$

Utilizzando la consueta regola della derivazione a catena, abbiamo

$$\frac{\partial \psi'(x')}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'^\nu} \quad (3.22)$$

ottenendo

$$i S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \psi'(x') - m \psi'(x') = 0. \quad (3.23)$$

Manca solo da imporre che

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu_\mu = \gamma^\nu \implies \boxed{\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)}. \quad (3.24)$$

Data la trasformazione di Lorentz Λ^μ_ν , se riesco a trovare una S che risolve questa equazione la forma dell'equazione di Dirac resta inalterata nei due sistemi di riferimento; tale S trasformerà lo *spinore di Dirac* nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Per definizione quindi gli oggetti ψ che trasformano secondo una $S(\Lambda)$, sono detti *spinori*. Cerchiamo ora una soluzione (3.24) per trasformazioni *proprie* e *infinitesime* (per costruire una trasformazione finita basta combinare infinite trasformazioni infinitesime, escludendo l'inversione degli assi, cioè la parità)

$$\Lambda^\mu_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu \quad \text{con} \quad \varepsilon^\mu_\nu = -\varepsilon^\nu_\mu. \quad (3.25)$$

Come scritto in precedenza, possiamo scrivere

$$S(\Lambda) \approx \mathbb{I} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Con questa approssimazione possiamo scrivere la (3.24) in questo modo

$$\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)\gamma^\mu\left(\mathbb{I} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right) = \gamma^\mu + \varepsilon^\mu_\nu\gamma^\nu. \quad (3.27)$$

Mantenendo solo i termini al primo ordine abbiamo

$$\frac{1}{2}\gamma^\mu\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\gamma^\mu = \varepsilon^\mu_\nu\gamma^\nu = \varepsilon_{\rho\sigma}g^{\rho\mu}g^\sigma_\nu\gamma^\nu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}g^\sigma_\nu - g^{\mu\sigma}g^\rho_\nu)\gamma^\nu. \quad (3.28)$$

Possiamo semplificare $\frac{1}{2}\varepsilon$

$$[\gamma^\mu, M^{\rho\sigma}] = (g^{\mu\rho}g^\sigma_\nu - g^{\mu\sigma}g^\rho_\nu)\gamma^\nu. \quad (3.29)$$

Si può verificare che la soluzione per $M^{\rho\sigma}$ è

$$M^{\rho\sigma} = \frac{1}{4}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \quad (3.30)$$

e corrispondentemente

$$S(\Lambda) = \mathbb{I} + \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.31)$$

L'equazione di Dirac è quindi covariante per trasformazioni di Lorentz proprie. In meccanica quantistica una trasformazione di coordinate o di simmetria è solitamente collegata con una trasformazione unitaria. In questo caso non è proprio così in quanto $S(\Lambda)$ non è, in generale, unitaria. Una trasformazione infinitesima unitaria differisce dall'identità per un operatore antihermitiano: $U = \mathbb{I} + i\epsilon A$, dove A è un operatore hermitiano in modo tale che $U^\dagger = U^{-1}$. In generale il termine $\varepsilon_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ non è un operatore antihermitiano. Nel caso degli indici spaziali abbiamo il commutatore di due matrici antihermitiane

$$\left(\varepsilon_{ij}[\gamma^i, \gamma^j]\right)^\dagger = \varepsilon_{ij}[\gamma^{j\dagger}, \gamma^{i\dagger}] = \varepsilon_{ij}[\gamma^j, \gamma^i] = -\varepsilon_{ij}[\gamma^i, \gamma^j] \quad (3.32)$$

che è effettivamente una matrice antihermitiana. Nel caso in cui abbiamo indici spaziali, infatti stiamo effettuando delle rotazioni spaziali che sono effettivamente delle trasformazioni unitarie.

Per i boost ovvero messe in moto lungo gli assi, abbiamo a che fare con il commutatore di una matrice hermitiana (γ^0) con quello di una matrice antihermitiana (γ^k). Tuttavia notiamo che il commutatore di due matrici hermitiane come $[\gamma^0, i\gamma^k] = ih$, è un operatore antihermitiano. Per la linearità del commutatore notiamo che $[\gamma^0, \gamma^k] = h$ è una quantità hermitiana. Pertanto questa non è una matrice unitaria. La S che abbiamo ottenuto è una *rappresentazione* del gruppo di Lorentz: una rappresentazione è una corrispondenza tra gli elementi del gruppo e un insieme di matrici che replica l'algebra del gruppo. Si può dimostrare che il gruppo di Lorentz non possiede trasformazioni unitarie finite dimensionali. S non può essere quindi unitaria; il sottogruppo delle rotazioni spaziali invece non ha questo tipo di problemi. Pertanto $S^{-1}(\Lambda) \neq S^\dagger(\Lambda)$; però si può far vedere che

$$\boxed{S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0}. \quad (3.33)$$

Per indici spaziali abbiamo che

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 \left(\mathbb{I} - \frac{1}{8} \varepsilon_{ij} [\gamma^i, \gamma^j] \right) \gamma^0 = \mathbb{I} - \frac{1}{8} \varepsilon_{ij} [\gamma^i, \gamma^j] = S^\dagger(\Lambda) \quad (3.34)$$

in quanto le γ^0 anticommutano con le γ^i , γ^j e $(\gamma^0)^2 = 1$. Nel caso di un indice spaziale e uno temporale invece il cambiamento di segno c'è in quanto γ^0 commuta con se stessa. Questa proprietà è molto importante e una conseguenza si vedrà ora.

3.2.1 Covarianti Bilineari

Vogliamo trovare una base per le matrici 4×4 di Dirac. Ci servono quindi 16 matrici hermitiane indipendenti. Possiamo costruire una base partendo dalle matrici γ^μ

$\mathbb{I}$	1 matrice	
γ^μ	4 matrici	
$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	1 matrice	(3.35)
$\gamma^5\gamma^\mu$	4 matrici	
$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	6 matrici	

L'identità è chiaramente indipendente in quanto è l'unica tra le 16 che non ha traccia nulla. γ^5 è hermitiana come si può verificare

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = \gamma^5 \quad (3.36)$$

Studiamo ora utili quantità che sono definibili a partire dagli spinori e dalle matrici γ . Se abbiamo uno spinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

allora lo spinore aggiunto (trasposto coniugato) è dato da

$$\psi^\dagger = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, \psi_3^\dagger, \psi_4^\dagger). \quad (3.38)$$

Le regole di trasformazione sono

$$\psi'_b(x') = S_{a,b}(\Lambda) \psi_b(x) \implies \psi'^{\dagger}_b(x') = \psi^{\dagger}_b(x) S^{\dagger}_{a,b}(\Lambda) \quad (3.39)$$

Introduciamo per comodità lo spinore barrato (vettore riga)

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0 \quad (3.40)$$

non dimenticando mai che l'equazione scritta sopra è equivalente a quella scritta con le componenti $\bar{\psi}_a = \psi^{\dagger}_b \gamma^0_{ba}$. La $\bar{\psi}$ si trasformerà, pertanto in questo modo

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^{\dagger}(x) S^{\dagger}(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \quad (3.41)$$

È interessante notare come per ognuna di queste 16 matrici è possibile costruire una quantità con proprietà di trasformazione ben definite secondo trasformazioni di Lorentz (i *covarianti di Dirac*). Questo ci dà una connessione tra le trasformazioni di Lorentz nello spaziotempo e le trasformazioni di Lorentz nello spazio di Dirac.

- I: Quantità $\bar{\psi}\psi$;

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (3.42)$$

si trasforma come una quantità scalare.

- γ^{μ} : Quantità $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$;

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^{\mu}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)\psi(x) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\nu}\psi(x) \quad (3.43)$$

si trasforma come un quadrivettore, avendo usato (3.24).

- γ^5 : Quantità $\bar{\psi}\gamma^5\psi$;

La matrice γ^5 fornisce una quantità scalare solo sotto trasformazioni di Lorentz proprie, ma cambia segno sotto parità: tale oggetto si definisce *pseudoscalare* (per la parità si veda l'ultimo paragrafo di questo capitolo). Scrivendoci la γ^5 in questo modo

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \quad (3.44)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') &= \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \psi'(x')\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\psi'(x') \\ &= \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \psi'(x')S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\rho}S(\Lambda)S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\sigma}S(\Lambda)\psi'(x') \\ &= \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^{\mu}_{\beta}\Lambda^{\nu}_{\delta}\Lambda^{\rho}_{\xi}\Lambda^{\sigma}_{\eta} \bar{\psi}(x)\gamma^{\beta}\gamma^{\delta}\gamma^{\xi}\gamma^{\eta}\psi(x) = \frac{i}{4!} \det(\Lambda) \varepsilon_{\beta\delta\xi\eta} \bar{\psi}(x)\gamma^{\beta}\gamma^{\delta}\gamma^{\xi}\gamma^{\eta}\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

- $\gamma^5\gamma^{\mu}$: Quantità $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi$;

Analogamente si può dimostrare che $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi$ trasforma come uno *pseudovettore*, ovvero cambia segno la componente temporale ma non quelle spaziali.

- $\sigma^{\mu\nu}$: Quantità $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$;

Analogamente si può dimostrare che $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ trasforma come un tensore doppio antisimmetrico.

3.2.2 Prodotto Scalare per l'Equazione di Dirac

L'equazione di Dirac, proprio come quella di Klein-Gordon, ammette un prodotto scalare per il quale l'evoluzione temporale è una trasformazione unitaria. La definizione di trasformazione unitaria, infatti, dipende dalla metrica: una volta scelto il prodotto scalare (e quindi la metrica), vogliamo ottenere una evoluzione, indotta dall'equazione di Dirac, che sia unitaria. Possiamo osservare che la quantità costruita precedentemente

$$J^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (3.46)$$

è una corrente conservata e permette di costruire un prodotto scalare tra soluzioni dell'equazione di Dirac (il procedimento è analogo a quello di Klein-Gordon). Quel che dobbiamo dimostrare è che $\partial_\mu J^\mu = 0$ lungo le equazioni del moto (cioè se la ψ verifica l'equazione di Dirac); a tal proposito ricaviamo l'equazione di Dirac per $\bar{\psi}$ facendone l'aggiunta

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = 0. \quad (3.47)$$

Moltiplicando a destra per γ^0 e utilizzando la relazione $\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$ che può essere facilmente verificata, otteniamo

$$-i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - m\bar{\psi} = 0 \implies i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (3.48)$$

Possiamo ora verificare la conservazione di J^μ

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = (\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) = im\bar{\psi}\psi - im\psi\bar{\psi} = 0. \quad (3.49)$$

Ne segue l'indipendenza dal tempo dell'integrale della sua componente temporale

$$\frac{d}{dx^0} \int d\mathbf{x} J^0(x) = \frac{d}{dx^0} \int d\mathbf{x} \bar{\psi}\gamma^0\psi = \frac{d}{dx^0} \int d\mathbf{x} \psi^\dagger\psi = 0. \quad (3.50)$$

Questo oggetto può essere interpretato come un prodotto scalare tra soluzioni ψ_1, ψ_2 dell'equazione di Dirac

$$\langle \psi_2, \psi_1 \rangle = \int d\mathbf{x} \psi_2^\dagger(x)\psi_1(x). \quad (3.51)$$

A differenza dal caso di Klein-Gordon, in questo caso il prodotto scalare è anche definito positivo. La simmetria della Lagrangiana di Dirac che crea questa corrente conservata deriva dalle trasformazioni di fase, come vedremo successivamente.

3.3 Soluzioni dell'equazione di Dirac

Preoccupiamoci ora di trovare delle soluzioni dell'equazione di Dirac, risolubile esplicitamente in quanto si tratta di un sistema di 4 equazioni differenziale a coefficienti costanti. Il metodo di risoluzione, sebbene più complicato, è analogo a quello di Klein-Gordon. Poichè il campo di Dirac ψ obbedisce all'equazione di Klein-Gordon, sappiamo immediatamente che questo può essere scritto come combinazione lineare di onde piane. Come caso preliminare risolviamo l'equazione di Dirac nel caso di un'onda piana corrispondente ad una particella con impulso spaziale $\mathbf{p}$ nullo. Da questo preliminare si vedrà come l'equazione di Dirac dia luogo a soluzioni ad energia negativa e come

la quarta componente sia collegata con l'energia a riposo della particella ($p^0 = \pm mc^2$). Inseriamo dentro l'equazione di Dirac l'onda piana $e^{-ip_0 x^0}$

$$e^{-ip^0 x^0} (\gamma^0 p^0 - m) = 0 \quad (3.52)$$

che implica

$$\begin{pmatrix} p^0 - m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^0 - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^0 - m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^0 - m \end{pmatrix} = 0. \quad (3.53)$$

Voglio che questo sistema sia compatibile; impongo che il determinante sia uguale a 0. Otteniamo due possibilità: $p^0 = m$ oppure $p^0 = -m$. Una cosa importante da notare è che ognuna delle due soluzioni ha molteplicità 2. Questo vuol dire che esiste un *grado di libertà interno*, identificabile con lo *spin*. Non basta pertanto specificare che la particella sia a riposo in quanto particelle con spin $1/2$ e $-1/2$ avranno, infatti, la stessa energia.

Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione di Dirac sotto questa forma

$$\psi(x) = u_r(p) e^{-ipx} \quad (3.54)$$

dove $u_r(p)$ è uno spinore a 4 componenti; l'indice r discriminerà tra gli eventuali spinori indipendenti egualmente possibili. Quello che dobbiamo fare è quindi cercare l'espressione di p^0 in funzione di $\mathbf{p}$ che abbiamo assegnato. Sappiamo che per ogni $\mathbf{p}$ esistono 2 soluzioni con $E > 0$ e 2 con $E < 0$: utilizziamo quindi la convenzione $p_0 > 0$ e indichiamo con gli spinori u le soluzioni ad energia positiva; per quelle a energia negativa useremo

$$\psi(x) = v_r(p) e^{ipx}. \quad (3.55)$$

Sostituendo nell'equazione di Dirac la (3.54), troviamo la condizione che deve soddisfare u

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m) u_r(p) e^{-ipx} = 0 \implies (\not{p} - m) u_r(p) = 0. \quad (3.56)$$

ψ è soluzione se e solo se $u_r(p)$ è autovettore di $\not{p}$ con autovalore m . Per il caso di energie negative la condizione per v sarà

$$(\not{p} + m) v_r(p) = 0. \quad (3.57)$$

Concentriamoci sulla prima equazione, quella per u in (3.56). Utilizzando l'espressione delle γ otteniamo

$$\not{p} - m = p_\mu \gamma^\mu - m = \begin{pmatrix} p_0 - m & p_i \sigma^i \\ -p_i \sigma^i & -p_0 - m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 - m & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -p_0 - m \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Scrivendoci ora lo spinore u esplicitando le componenti

$$u_r(p) = \begin{pmatrix} \phi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

dove ϕ e χ sono due spinori a due componenti (esattamente per lo stesso motivo per cui la matrice è scritta a blocchi bidimensionali), otteniamo

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -p_0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} = 0. \quad (3.60)$$

Per trovare la soluzione dovrei imporre che il determinante sia uguale a 0; in realtà è molto più facile risolvere a blocchi. Dalla seconda equazione segue che

$$\chi_r = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p^0 + m} \phi_r \quad (3.61)$$

e, sostituendo nella prima, si ottiene

$$(p^0 - m) \phi_r - \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2}{p^0 + m} \phi_r = 0. \quad (3.62)$$

Il termine $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$ può essere scritto in questo modo

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = p_i \sigma_i p_j \sigma_j = p_i p_j \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} p_i p_j \left([\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\} \right) = \mathbf{p}^2 \quad (3.63)$$

poichè $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}$. Continuando i conti arriviamo a

$$(p^0)^2 - m^2 = \mathbf{p}^2. \quad (3.64)$$

Ritroviamo quindi l'usuale equazione per energia e momento (da cui d'altronde eravamo partiti, avendo imposto la validità dell'equazione di Klein-Gordon per ogni componente). È quindi importante sottolineare che il sistema omogeneo (3.60) possiede autosoluzioni (ossia soluzioni non identicamente nulle) se e solo se è verificata la condizione

$$p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_{\mathbf{p}}. \quad (3.65)$$

la quale determina i valori possibili per p^0 , una volta fissato $\mathbf{p}$. Per la convenzione imposta, prendiamo solo la soluzione con $p^0 > 0$. Contemporaneamente, abbiamo ottenuto anche la forma dello spinore $u_r(\mathbf{p})$

$$u_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

con ϕ spinore bidimensionale (due componenti) arbitrario.

Risolviamo ora la (3.57). I passaggi sono gli stessi rispetto a prima basta cambiare solo il segno a m . Scrivendoci le $v_r(\mathbf{p})$ nelle componenti ϕ e χ otteniamo

$$\begin{pmatrix} p_0 + m & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -p_0 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} = 0. \quad (3.67)$$

In questo caso conviene ricavarsi la $\phi_r = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_r$ ottenendo lo spinore v

$$v_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

con χ spinore bidimensionale (due componenti) arbitrario.

NORMALIZZAZIONE DELLO SPINORE AD ENERGIA POSITIVA

Vogliamo ora normalizzare le soluzioni trovate. Concentriamoci ora su quelle ad energia positiva. La normalizzazione nel caso delle soluzioni dell'equazione di Dirac avviene in due stadi: per prima cosa conviene fare una *prenormalizzazione*

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} . \quad (3.69)$$

Questa è una condizione di normalizzazione Lorentz invariante in quanto $\bar{u}_r(p)u_s(p)$ è uno scalare. Otteniamo

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = u_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0 u_s(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_r^\dagger & \phi_r^\dagger \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_s \end{pmatrix} = \delta_{rs} \quad (3.70)$$

ossia

$$\boxed{\phi_r^\dagger \phi_s - \phi_r^\dagger \frac{\mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} \phi_s = \delta_{rs}} . \quad (3.71)$$

Possiamo ora supporre che ϕ_r e ϕ_s siano ortonormali, ad esempio scegliendo la base

$$\phi_{r,s=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_{r,s=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad (3.72)$$

abbiamo quindi che $\phi_r^\dagger \phi_s = \delta_{rs}$ in quanto $\phi_r^\dagger$ è lo spinore riga bidimensionale. Il fattore di normalizzazione sarà quindi

$$1 - \frac{\mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} = \frac{E_{\mathbf{p}}^2 + m^2 + 2mE_{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} = \frac{2m^2 + 2mE_{\mathbf{p}}}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} = \frac{2m}{E_{\mathbf{p}} + m} \quad (3.73)$$

Quindi gli spinori prenormalizzati sono scritti nella forma

$$u_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \phi_r \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \phi_r \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Siamo ora interessati a calcolare la normalizzazione della soluzione ad energia positiva (3.54) secondo la *vera* metrica di Dirac, generata da $\int d\mathbf{x} \psi^\dagger \psi$. Calcoliamo quindi con gli spinori prenormalizzati la quantità $u^\dagger(p)u(p)$ (elimiamo le δ_{rs} per semplicità)

$$u^\dagger(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} \right) = \frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m} \frac{2E_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}} + m} = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} . \quad (3.75)$$

È facile vedere come il risultato si trasformi come la componente temporale di un quadrivettore (esattamente come la normalizzazione delle soluzioni di Klein-Gordon), in quanto $u^\dagger(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p})\gamma^0 u(\mathbf{p})$. È essenziale avere questo fattore; a questo serve la prenormalizzazione. La soluzione di Dirac ad energia positiva avrà la seguente espressione

$$\psi_{\mathbf{p},s}^{(+)}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}}} u_s(p) e^{-ipx} \quad (3.76)$$

in modo tale che

$$\left(\psi_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}, \psi_{\mathbf{p},s}^{(+)} \right) = \delta_{ss'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.77)$$

NORMALIZZAZIONE DELLO SPINORE AD ENERGIA NEGATIVA

Come nel caso delle energie negative effettuiamo una prenormalizzazione

$$\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}. \quad (3.78)$$

Supponendo come prima che χ_r e χ_s siano ortonormali, adottiamo una convenzione opposta a quella vista in precedenza

$$\chi_{r,s=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_{r,s=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (3.79)$$

ossia associando all'indice 1 il secondo elemento della base canonica e all'indice 2 il primo elemento. Ciò è importante: mentre per il campo di Dirac a $m \neq 0$ le elicità delle particelle e delle antiparticelle saranno sempre $\pm 1/2$, quando andremo a trattare il caso $m = 0$, dovendo rinunciare alla parità, le elicità di particelle e antiparticelle saranno *opposte*. Questa convenzione non cambia però i calcoli successivi, che sono uguali ai precedenti. Otteniamo come normalizzazione la quantità

$$\frac{\mathbf{p}^2}{(E_{\mathbf{p}} + m)^2} - 1 = -\frac{2m}{E_{\mathbf{p}} + m} < 0. \quad (3.80)$$

Quindi questa metrica sotto cui sto normalizzando non è definita positiva (non tutti i vettori di questo spazio hanno norma positiva, proprio come in questo caso). Le soluzioni ad energia negativa hanno una metrica negativa. Per ovviare a questo problema pongo

$$\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = -\delta_{rs} \quad (3.81)$$

e la prenormalizzazione sarà sempre Lorentz invariante. In questo modo i calcoli sono esattamente gli stessi rispetto a prima e valgono pertanto le equazioni (3.74) e (3.75) per le $v_r(p)$. Posso ora scrivere le soluzioni ad energia negativa in questo modo

$$\psi_{\mathbf{p},s}^{(-)}(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}}} v_s(p) e^{ipx}. \quad (3.82)$$

Con queste definizioni

$$\begin{cases} \phi_r^\dagger \chi_s = 0 \\ \phi_r^\dagger \phi_s = \delta_{rs} \\ \chi_r^\dagger \chi_s = \delta_{rs} \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{u}_r(p)v_s(p) = 0 \\ \bar{u}_r(p)u_s(p) = \delta_{rs} \\ \bar{v}_r(p)v_s(p) = -\delta_{rs} \end{cases} \quad (3.83)$$

abbiamo pertanto che gli spinori quadridimensionali ad energia positiva u sono sempre ortogonali a quelli ad energia negativa v . Notare che sono ortogonali secondo la metrica $\bar{u}_r(p)v_s(p) = u_r^\dagger(p)\gamma^0 v_s(p)$, che non è il vero prodotto scalare di Dirac. C'è un motivo profondo per l'ortogonalità. Le equazioni agli autovalori ricavate in precedenza per le $u_r(p)$ e le $v_r(p)$ sono

$$\begin{cases} \not{p} u_r(\mathbf{p}) = m u_r(\mathbf{p}) \\ \not{p} v_r(\mathbf{p}) = -m v_r(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (3.84)$$

capiamo che $u_r(p)$ e le $v_r(p)$ sono autovettori relativi ad autovalori diversi ($\pm m$) dello stesso operatore $\not{p}$. Sembrerebbe quindi ovvio che valga l'ortonormalità. Tuttavia l'operatore $\not{p}$ non è hermitiano in quanto

$$\not{p} = p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (3.85)$$

dove il primo pezzo è hermitiano ma il secondo è antihermitiano, quindi non vale il teorema di ortogonalità. Tuttavia, se guardo questo problema agli autovalori in uno spazio con una metrica diversa, posso rendere la matrice $\bar{p}$ hermitiana in quella metrica. La metrica che considero è proprio

$$(\psi_2, \psi_1) = \bar{\psi}_2 \psi_1 \quad (3.86)$$

che, come abbiamo visto, non è definita positiva. Secondo questa metrica l'operatore $\not{p}$ è hermitiano

$$(\not{p}\psi_2, \psi_1) = (\bar{\not{p}\psi_2}) \psi_1 = (\not{p}\psi_2)^\dagger \gamma^0 \psi_1 = \psi_2^\dagger p_\mu \gamma^\mu \gamma^0 \psi_1 = \psi_2^\dagger \gamma^0 p_\mu \gamma^\mu \psi_1 = (\psi_2, \not{p}\psi_1) \quad (3.87)$$

e quindi gli autovettori relativi a diversi autovalori sono ortogonali tra di loro.

3.3.1 Relazione di Completezza e Proiettori

Finora abbiamo avuto a che fare con uno spazio vettoriale complesso in 4 dimensioni. Abbiamo trovato in questo spazio 4 vettori indipendenti con una relazione di ortogonalità

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, & u_2(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ v_1(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, & v_2(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_{\mathbf{p}} + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.88)$$

Quindi ci deve essere una *relazione di completezza*

$$\mathbb{I} = \sum_{r=1}^2 (a u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) + b v_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p})) , \quad (3.89)$$

con a e b coefficienti da determinare. Notare inoltre che il termine $u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p})$ è un operatore (matrice 4×4), esattamente come in meccanica quantistica era un operatore $|\psi\rangle\langle\psi|$. Per trovare i coefficienti applichiamo la (3.89) ad esempio ad $u_1(p)$ e $v_1(p)$. È evidente che per avere $\mathbb{I} u_1(\mathbf{p}) = u_1(\mathbf{p})$ e $\mathbb{I} v_1(p) = v_1(p)$ deve essere $a = 1$ e $c = -1$. La relazione di completezza si scrive in questo modo

$$\mathbb{I} = \sum_{r=1}^2 (u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) - v_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p})) . \quad (3.90)$$

Possiamo interpretare questa relazione di completezza come la somma di un *proiettore* sugli stati ad energia positiva ed uno su stati ad energia negativa. Andiamo a vedere la forma esplicita di questi proiettori. Partiamo dal caso ad energia positiva. Il proiettore sugli stati ad energia positiva realizza l'identità sul sottospazio delle soluzioni ad energia positiva annullando quelle nel sottospazio ad energia negativa

$$\begin{cases} \left(\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) \right) u_s(\mathbf{p}) = u_s(\mathbf{p}) \\ \left(\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) \right) v_s(\mathbf{p}) = 0. \end{cases} \quad (3.91)$$

Questo si suggerisce che il proiettore sugli stati ad energia positiva sia qualcosa proporzionale a $\not{p} + m$ (partendo dal fatto che applicato ad una $v_r(p)$ fa 0). Più precisamente

$$\frac{\not{p} + m}{2m} u_s(p) = \frac{2m}{2m} u_s(p) = u_s(p). \quad (3.92)$$

Verifichiamo ora che questo sia effettivamente un proiettore, ovvero soddisfi $P^2 = P$

$$\frac{(\not{p} + m)(\not{p} + m)}{4m^2} = \frac{\not{p}^2 + 2m\not{p} + m^2}{4m^2}; \quad (3.93)$$

d'altra parte abbiamo

$$\not{p}\not{p} = p_\mu \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu = \frac{p_\mu p_\nu}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^\nu p_\nu = p^2 = m^2, \quad (3.94)$$

per cui

$$\frac{\not{p}^2 + 2m\not{p} + m^2}{4m^2} = \frac{2m^2 + 2m\not{p}}{4m^2} = \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (3.95)$$

Segue quindi che possiamo identificare

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) = \left(\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) \right) = \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (3.96)$$

Questo proiettore è ovviamente hermitiano in quanto $\not{p}$ è hermitiano nella metrica (3.86). Il proiettore sulle energie negative è $\mathbb{I} - \Lambda_+(p)$, ovvero

$$\Lambda_-(\mathbf{p}) = \left(- \sum_{r=1}^2 v_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p}) \right) = \frac{-\not{p} + m}{2m}. \quad (3.97)$$

La relazione di completezza si scrive

$$\Lambda_+(\mathbf{p}) + \Lambda_-(\mathbf{p}) = \mathbb{I}. \quad (3.98)$$

Ricapitolando abbiamo trovato che la soluzione generale dell'equazione di Dirac può essere scritta nella forma

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left(b_r(\mathbf{p}) u_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{-ipx} + d_r^*(\mathbf{p}) v_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{ipx} \right) \quad (3.99)$$

dove b e d sono, classicamente, funzioni arbitrarie degli impulsi $\mathbf{p}$.

3.4 Limite non Relativistico dell'Equazione di Dirac

Prima di procedere alla seconda quantizzazione vogliamo chiederci quale sia il limite non relativistico dell'equazione di Dirac. Ci interessa in particolar modo come si comporta nel limite non relativistico l'equazione di Dirac per una particella che si muove in un campo elettromagnetico esterno. La mia particella avrà una carica (sennò non interagirebbe), e muovendosi genererà un campo elettromagnetico; l'approssimazione che facciamo per il campo elettromagnetico esterno è

di tenere in conto solo l'azione del campo elettromagnetico esterno sulla particella, ma non la controreazione della particella su di esso. Questa approssimazione (molto utilizzata in fisica atomica) è valida quando il campo elettromagnetico esterno è molto più grande del campo elettromagnetico generato dalla particella in movimento. In altre parole la particella, accelerata dal campo elettromagnetico esterno irraggerà, ma questo irraggiamento lo trascureremo rispetto agli effetti del campo elettromagnetico esterno (questo non viene perturbato sensibilmente dall'irraggiamento). Quando esamineremo l'elettrodinamica quantistica dovremo tenere in considerazione sia l'azione del campo sulla materia che l'azione della materia sul campo.

Prendiamo dunque l'equazione di Dirac; poichè dobbiamo fare contatto con la meccanica quantistica usciamo dal sistema di unità naturali

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta \right) \psi. \quad (3.100)$$

Questa equazione, come abbiamo già visto, descrive una particella libera. Se vogliamo inserirci un campo elettromagnetico esterno, dobbiamo eseguire gli stessi passaggi eseguiti per arrivare all'equazione di Pauli in meccanica quantistica. Dobbiamo effettuare la *sostituzione minimale* nell'equazione di Dirac

$$\begin{cases} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\pi} \\ H \rightarrow H + e \Phi. \end{cases} \quad (e < 0) \quad (3.101)$$

ottenendo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + mc^2 \beta \right) \psi + e \Phi \psi. \quad (3.102)$$

La prima cosa che mi conviene fare è inserire le espressioni di $\boldsymbol{\alpha}$ e β

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} + e \Phi \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

dove $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\omega}$ non sono gli spinori di prima, in quanto sono funzioni non banali del tempo e dello spazio; la loro forma dipenderà da come sono fatti questi campi esterni (in generale sono estremamente complicati). Si può riscrivere il tutto nel sistema

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} = mc^2 \tilde{\xi} + c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \tilde{\omega} + e \Phi \tilde{\xi} \\ i\hbar \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \tilde{\xi} - mc^2 \tilde{\omega} + e \Phi \tilde{\omega}. \end{cases} \quad (3.104)$$

Fin qui non ho fatto nessuna approssimazione. Fare il limite non relativistico vuol dire che il campo elettromagnetico non sia troppo intenso in modo tale che il trasferimento di energia e impulso del campo all'elettrone sia tale da mantenerlo in regime non relativistico. Tuttavia dobbiamo fare attenzione poichè in queste equazioni l'energia cinetica comprende quella a riposo. Per eliminarla si esegue una *trasformazione di fase*, scrivendo

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \begin{pmatrix} \xi \\ \omega \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

ovvero stiamo effettuando una trasformazione unitaria che elimina dalla dipendenza temporale degli spinori ξ e ω il termine mc^2 . Sostituendo otterremo due equazioni per ξ e ω

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \xi}{\partial t} = c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \omega + e \Phi \xi \\ i\hbar \frac{\partial \omega}{\partial t} = c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \xi - 2mc^2 \omega + e \Phi \omega. \end{cases} \quad (3.106)$$

Ora possiamo procedere a fare l'approssimazione. Sappiamo che le soluzioni con le prime due componenti non nulle (nel nostro caso le componenti incluse in ξ) sono quelle a energia positiva, mentre le altre due hanno energia negativa. Per passare al limite non relativistico voglio che le componenti basse siano trascurabili rispetto a quelle alte; questo per codificare matematicamente il fatto che, in condizioni non relativistiche, la materia predomina sull'antimateria. Considereremo quindi che le componenti di ω siano trascurabili rispetto a quelle di ξ . Possiamo quindi trascurare il termine $e \Phi \omega$, in quanto dello stesso ordine di ω . Analogamente il termine $i\hbar \frac{\partial \omega}{\partial t}$, che, in teoria quantistica corrisponde all'energia, ora contiene soltanto l'energia non a riposo e quindi può essere trascurato. Riassumendo, l'approssimazione non relativistica elimina il primo e l'ultimo termine della seconda equazione. Possiamo risolvere la seconda equazione in ω

$$\omega \simeq \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{2mc} \xi \quad (3.107)$$

e inserirla nella prima

$$i\hbar \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2}{2m} \xi + e \Phi \xi. \quad (3.108)$$

Possiamo osservare qualcosa di interessante in questa equazione. Supponiamo che il campo esterno sia 0; i $\boldsymbol{\pi}$ diventano $\mathbf{p}$ e $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 = \mathbf{p}^2$: l'equazione diventa quella di Schrödinger. Cerchiamo ora di calcolare $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2$. La difficoltà rispetto a prima sta nel fatto che π_i non commuta con π_j perchè in generale p_i non commuta con il potenziale vettore A_j che è funzione delle x .

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 = \sigma^i \pi^i \sigma^j \pi^j, \quad (3.109)$$

dove le π^i operano sulle x^i mentre le σ^i sono numeri; otteniamo

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 = \frac{\pi^i \pi^j}{2} (\{\sigma^i, \sigma^j\} + [\sigma^i, \sigma^j]) = \boldsymbol{\pi}^2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \pi^i \pi^j \quad (3.110)$$

poichè $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$ e $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$. Il primo termine ($\boldsymbol{\pi}^2$) è esattamente lo stesso dell'equazione di Pauli di una particella carica in un campo elettromagnetico. Tuttavia si può notare subito che c'è un termine in più. Questo perchè, come dicevamo in precedenza, le π^i e le π^j non commutano tra di loro

$$\pi^i \pi^j = \frac{1}{2} (\{\pi^i, \pi^j\} + [\pi^i, \pi^j]) \quad (3.111)$$

il primo termine di questa equazione si annulla quando viene moltiplicato per il simbolo di Levi-Civita in quanto è simmetrico. Otteniamo

$$(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\pi}^2 + \frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} \sigma_k [\pi^i, \pi^j]; \quad (3.112)$$

dobbiamo quindi calcolare il commutatore $[\pi^i, \pi^j]$

$$\left[p^i - \frac{e}{c} A^i, p^j - \frac{e}{c} A^j \right] = -\frac{e}{c} [p^i, A^j] - \frac{e}{c} [A^i, p^j] \quad (3.113)$$

essendo $[p^i, p^j] = 0$ e $[A^i, A^j] = 0$. Per calcolare $[p^i, A^j]$ applichiamo questo operatore ad una funzione di prova Θ

$$\begin{aligned} [p^i, A^j] \Theta &= -i\hbar (\nabla^i A^j - A^j \nabla^i) \Theta = -i\hbar (\nabla^i (A^j \Theta) - A^j \nabla^i \Theta) \\ &= -i\hbar (\Theta \nabla^i A^j + A^j \nabla^i \Theta - A^j \nabla^i \Theta) = -i\hbar (\nabla^i A^j) \Theta. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Il secondo termine $[A^i, p^j] = -[p^j, A^i]$ è uguale a quello appena calcolato a meno di un -1 e uno scambio di indici. Otteniamo

$$[\pi^i, \pi^j] = \frac{i\hbar e}{c} (\nabla^i A^j - \nabla^j A^i) \quad (3.115)$$

Inserendo il commutatore nella (3.112) otteniamo

$$(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{2c} \epsilon^{ijk} (\nabla^i A^j - \nabla^j A^i) \sigma^k \quad (3.116)$$

Il primo termine, $\boldsymbol{\pi}^2$, è detto *termine diamagnetico* in quanto descrive l'effetto del campo elettromagnetico esterno sul moto orbitale degli elettroni. Si presentano come diamagnetici tutti quei materiali i cui atomi sono privi di momento magnetico proprio: in essi la polarizzazione magnetica è dovuta solo alla *precessione di Larmor*. Il secondo termine può essere riarrangiato notando che $\epsilon^{ijk} \nabla^i A^j = (\nabla \wedge \mathbf{A})^k = B^k$ e che $-\epsilon^{ijk} \nabla^j A^i = \epsilon^{jik} \nabla^j A^i = (\nabla \wedge \mathbf{A})^k = B^k$ dà lo stesso contributo

$$(\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{\pi}^2 - \frac{e\hbar}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.117)$$

L'equazione (3.108) diventa

$$i\hbar \frac{\partial \xi}{\partial t} = \left[\frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} + e\Phi \right] \xi. \quad (3.118)$$

Abbiamo ottenuto una equazione di Pauli con un termine aggiuntivo che rappresenta l'interazione di un momento magnetico intrinseco con il campo elettromagnetico esterno $\mathbf{B}$. Il momento magnetico è proporzionale al momento angolare intrinseco o *spin* della particella $\boldsymbol{\sigma}/2$, tramite il fattore $\frac{e}{mc}$. Chiamando $S = \hbar \boldsymbol{\sigma}/2$ il momento magnetico ha la forma

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{mc} \mathbf{S}. \quad (3.119)$$

Come riprova che lo spin è una quantità *intrinseca* della particella, ovvero non proviene da una rotazione intorno ad un asse (idealmente una sfera classica che gira intorno a se stessa) andiamo a calcolare il momento magnetico di una sfera classica in un campo magnetico. In altre parole, qualsiasi cosa che ruoti su se stessa e che ritorni alla condizione iniziale dopo una rotazione di 2π non può dare origine allo spin. Per vederlo prendiamo una particella in moto in un campo magnetico esterno $\mathbf{B}$ rivolto lungo la direzione z : $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Se il campo è costante il potenziale vettore può essere ricavato facilmente tramite

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}. \quad (3.120)$$

Per verificarlo calcoliamoci il rotore di $\mathbf{A}$

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}). \quad (3.121)$$

Calcoliamoci ora il doppio prodotto vettoriale con l'ausilio di 3 vettori generici $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

$$\nabla \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\nabla \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{c} \quad (3.122)$$

ovvero

$$\nabla \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (3.123)$$

per un campo $\mathbf{B}$ costante si ha

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2} (3\mathbf{B} - \mathbf{B}) = \mathbf{B} \quad (3.124)$$

e quindi vale la formula (3.121). Vogliamo ora calcolarci quanto vale il contributo all'energia di $\pi^2/2m$. Prendo ora un campo magnetico sufficientemente debole da poter trascurare $\mathbf{A}^2$ (poichè $\mathbf{A}$ è proporzionale a $\mathbf{B}$)

$$\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} \simeq \frac{\mathbf{p}^2 - 2\frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} \quad (3.125)$$

dove abbiamo potuto fare il doppio prodotto in quanto $\mathbf{A}$, per un campo magnetico costante è scrivibile come un prodotto vettoriale e quindi abbiamo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} b_i r_j p_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} p_k B_i r_j = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.126)$$

Possiamo riarrangiare la (3.125) in questo modo

$$\frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} \simeq \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \cdot \mathbf{B} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \quad (3.127)$$

con $\mathbf{L}$ momento angolare orbitale. Possiamo vedere ora che il momento magnetico orbitale intrinseco μ , ricavato precedentemente, è il doppio del momento magnetico orbitale $\frac{e}{2mc} \mathbf{L}$. Questo fattore 2 è denominato fattore g dell'elettrone. Possiamo riscrivere la (3.118) nell'approssimazione di campi magnetici esterni deboli

$$i\hbar \frac{\partial \xi}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) + e\Phi \right] \xi. \quad (3.128)$$

Questo procedimendo di passaggio al limite non relativistico ci ha permesso di dedurre che le soluzioni ad energia positiva rappresentano particelle di spin 1/2. Inoltre abbiamo scoperto, in modo del tutto naturale, il valore del fattore g dell'elettrone, che in meccanica quantistica era stato aggiunto ad hoc. In realtà il valore del fattore g non è proprio pari a 2: l'imprecisione del nostro calcolo è dovuta al fatto che abbiamo considerato solo l'azione del campo sulla materia e non quello della materia sul campo. L'elettrodinamica quantistica, che considera sia le particelle sia il campo elettromagnetico come variabili, predice correttamente il valore del fattore g con una straordinaria precisione.

3.5 Quantizzazione dell'equazione di Dirac

3.5.1 Primi Tentativi di Quantizzazione

Il primo passo per costruire un formalismo canonico è identificare una azione dell'equazione di Dirac $(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0$. L'azione è

$$S = \int d^4x \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \quad (3.129)$$

per ora ψ e $\bar{\psi}$ sono due variabili canoniche indipendenti. In seguito vedremo che, lungo le equazioni del moto, si avrà l'uguaglianza $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Verifichiamo ora che questa sia l'azione giusta facendo la variazione dell'azione

$$\delta S = \int d^4x \left(\delta \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \delta \psi \right). \quad (3.130)$$

Siccome sono variabili canoniche indipendenti posso prendere $\delta \psi = 0$ e ottenere, imponendo $\delta S = 0$

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi = 0. \quad (3.131)$$

Se invece prendiamo $\delta \bar{\psi} = 0$ otteniamo

$$\delta S = \int d^4x \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \delta \psi = \int d^4x \left(i\bar{\psi} (\cancel{\partial} \delta \psi) - m\bar{\psi} \delta \psi \right); \quad (3.132)$$

integrando per parti si ha

$$\delta S = \int d^4x \left(-i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \delta \psi - m\bar{\psi} \delta \psi \right) = - \int d^4x \bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\cancel{\partial}} + m \right) \delta \psi = 0 \quad (3.133)$$

dove abbiamo denominato $\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = \bar{\psi} \overleftarrow{\cancel{\partial}}$, nel senso che la derivata cambia posto e va a sinistra della $\bar{\psi}$ ma la γ^μ resta alla sua destra. Questa equazione è soddisfatta se e solo se

$$\bar{\psi} \left(i \overleftarrow{\cancel{\partial}} + m \right) = 0 \quad (3.134)$$

che è l'aggiunta dell'equazione di Dirac (vedi i conti eseguiti nel paragrafo del prodotto scalare di Dirac). In questo modo abbiamo trovato, come predetto, che lungo le equazioni del moto si ha l'identificazione $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. L'azione che abbiamo definito, quindi riproduce l'equazione di Dirac e la sua aggiunta.

Il secondo passo per costruire il formalismo canonico è costruire le densità di momenti coniugati (visto che abbiamo a che fare con un sistema con un insieme continuo di gradi di libertà). Come abbiamo già visto la densità lagrangiana ha questa forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \quad (3.135)$$

e i corrispondenti momenti coniugati saranno

$$\begin{cases} \pi_{\psi_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger \\ \pi_{\bar{\psi}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0. \end{cases} \quad (3.136)$$

Apparentemente sembra che si abbia un problema analogo a quello avuto con la quantizzazione del campo elettromagnetico in quanto le $\bar{\psi}$ non hanno momenti coniugati; in realtà il problema è meno grave. Nell'elettromagnetismo l'annullamento del momento coniugato rispetto ad A_0 segnalava l'impossibilità di avere una evoluzione unica a partire dalle condizioni iniziali (dovuta alle trasformazioni di Gauge). In Dirac non abbiamo questa ambiguità: è sufficiente assegnare la funzione di Dirac al tempo iniziale per determinare univocamente la soluzione del problema di Cauchy (non abbiamo l'invarianza di Gauge). Il problema principale deriverà dal fatto che per ottenere una teoria consistente i fermioni vanno quantizzati con gli anticommutatori mentre i bosoni con i commutatori.

Il terzo passo è quello di scrivere la soluzione generale dell'equazione di Dirac classica. La soluzione si può scrivere come una sovrapposizione di onde piane

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left(b_r(\mathbf{p}) u_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{ipx} \right) \quad (3.137)$$

dove $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Per ogni $\mathbf{p}$ questa è quindi la soluzione generale dell'equazione di Dirac libera. Successivamente possiamo imporre le regole di commutazione a tempi uguali

$$\begin{cases} [\psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta^\dagger(y)]_{x^0=y^0} = [\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)]_{x^0=y^0} = 0 \\ [\psi_\alpha(x), \pi_{\psi_\beta}(y)]_{x^0=y^0} = i \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y) \end{cases} \implies [\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)]_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y) \quad (3.138)$$

questo è il formalismo canonico visto per Klein-Gordon e riprodotto su Dirac. Ora posso procedere interpretando le $b_r(\mathbf{p})$ e le $d_r(\mathbf{p})$ come operatori e ricavando le regole di commutazione

$$\begin{cases} [b_r(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ [d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \end{cases} \quad (3.139)$$

tutti gli altri commutatori sono 0. Andiamo ora a calcolare l'energia effettuando la trasformazione di Legendre

$$\begin{aligned} H &= \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} \right) = \int d\mathbf{x} \left(i \psi_\alpha^\dagger \dot{\psi}_\alpha - \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \right) \\ &= \int d\mathbf{x} \left(i \psi^\dagger \dot{\psi} - \bar{\psi} (i \gamma^0 \dot{\psi} + i \gamma^k \partial_k \psi) + m \bar{\psi} \psi \right) = \int d\mathbf{x} \left(-i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \partial_k \psi + m \psi^\dagger \gamma^0 \psi \right) \\ &= \int d\mathbf{x} \left(-i \psi^\dagger \alpha^k \partial_k \psi + m \psi^\dagger \beta \psi \right) = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m \beta) \psi \end{aligned} \quad (3.140)$$

dove si è usato $\gamma^k = \gamma^0 \alpha^k$ e $\gamma^0 = \beta$. Gli α sono indici spinoriali nella seconda riga di calcoli è stata eliminata la somma su di essi interpretando come al solito $\psi^\dagger$ come lo spinore riga e ψ come lo spinore colonna. Abbiamo ottenuto come energia conservata il valor medio dell'hamiltoniana dell'equazione di Dirac. Questo aiuta nei calcoli in quanto ora bisogna sostituire in questa equazione l'espressione della $\psi(x)$ e della $\psi^\dagger(x)$ soluzioni della equazione di Dirac

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d\mathbf{p} E_{\mathbf{p}} \left[b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) \right] \quad (3.141)$$

Otteniamo questo risultato in quanto le ψ sono autofunzioni dell'hamiltoniana con autovalori positivi (relativi alla parte con energie positive) e negativi (energie negative). Il problema ora è che questa Hamiltoniana non è definita positiva. Se noi volessimo definire lo stato di vuoto come quello stato che è annichilato da tutti le b e da tutte le d , avremmo quindi un problema di energia di punto 0. Possiamo riscrivere l'hamiltoniana ben ordinata

$$:H: = \sum_{r=1}^2 \int d\mathbf{p} E_{\mathbf{p}} \left[b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right]. \quad (3.142)$$

Quindi effettivamente posso definire una energia di punto 0; tuttavia questo *non* è lo stato di minima energia. Questa Hamiltoniana non ha un estremo inferiore in quanto posso continuare ad aggiungere particelle e avere energie sempre più basse (anche negative). Questa teoria è quindi inconsistente per come è stata scritta. Per correggerla dobbiamo richiamare ciò che in meccanica quantistica era detto oscillatore di Fermi.

3.5.2 Oscillatore di Fermi e Regole di Anticommutazione

Nel caso dell'oscillatore armonico quantistico unidimensionale eravamo passati da una Hamiltoniana del tipo $H = p^2/2m + 1/2 m\omega^2 x^2$ ad una $H = \hbar\omega a^\dagger a$ avendo definito l'operatore $a = 1/\sqrt{2} (x + ip)$ con una relazione di commutazione $[a, a^\dagger] = 1$. L'oscillatore di Fermi è analogo al caso dell'oscillatore armonico; l'unica differenza sta nel sostituire le regole di commutazione con quelle di anticommutazione

$$\begin{aligned} \{a, a^\dagger\} &= 1 \\ \{a, a\} &= 0 \\ \{a^\dagger, a^\dagger\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Allora dalla seconda e dalla terza regola si può ricavare

$$a^2 = 0 \quad (a^\dagger)^2 = 0. \quad (3.144)$$

Come nell'oscillatore armonico, in tale spazio esisterà uno stato di vuoto $|0\rangle$ definito dalla relazione

$$a|0\rangle = 0; \quad (3.145)$$

se definiamo l'operatore numero secondo $N = a^\dagger a$, vediamo che

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger a \{a^\dagger, a\} - a^\dagger a a a^\dagger = a^\dagger a = N. \quad (3.146)$$

Poichè $N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a = N$, ovvero l'operatore numero è hermitiano, i suoi autovalori devono soddisfare $n^2 = n$ cioè gli autovalori di N possono essere 0 o 1. I corrispondenti autostati di N sono $a^\dagger|0\rangle$ e $|0\rangle$

$$\begin{aligned} N a^\dagger|0\rangle &= a^\dagger a a^\dagger|0\rangle = a^\dagger \{a, a^\dagger\}|0\rangle = a^\dagger|0\rangle \\ N|0\rangle &= a^\dagger a|0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Pertanto l'oscillatore di Fermi rappresenta uno spazio di Hilbert finito dimensionale in quanto si possono avere soltanto due stati $|0\rangle$ e $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ in quanto $(a^\dagger)^2 = 0$. In tale spazio è possibile

avere solo una o nessuna particella in un certo livello; l'impossibilità di avere stati a due particelle è la codifica matematica del principio di esclusione.

Tutto questo suggerisce di sostituire le regole di commutazione con regole di anticommutazione

$$\begin{cases} \{b_r(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \end{cases} \quad (3.148)$$

tutte le anticommutazioni di altre combinazioni di operatori di creazione o distruzione si annullano. Definendo lo stato fondamentale come quel ket $|0\rangle$ tale che è annullato da tutti gli operatori di distruzione b e d

$$\begin{cases} b_r(\mathbf{p}) |0\rangle = 0 \\ d_r(\mathbf{p}) |0\rangle = 0, \end{cases} \quad (3.149)$$

possiamo costruire su di questo degli stati

$$\begin{cases} b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \\ d_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle. \end{cases} \quad (3.150)$$

Il primo stato, ad esempio rappresenta uno stato ad una particella di tipo b con impulso $\mathbf{p}$ e polarizzazione o spin r (su questa ultima affermazione ci arriveremo successivamente). Quanto proviamo ad aggiungere una particella nello stesso stato con impulso e spin uguali otteniamo 0 perchè $(b_r^\dagger(\mathbf{p}))^2 = (d_r^\dagger(\mathbf{p}))^2 = 0$. Vedremo successivamente che la loro funzione d'onda è antisimmetrica. Questo accorgimento risolve il problema dell'energia negativa, in quanto

$$d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) = \{d_r(\mathbf{p}), d_r^\dagger(\mathbf{p})\} - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) = 1 - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \quad (3.151)$$

dove 1 contribuisce al calcolo dell'energia dello stato che è annichilato da tutti i b e d , cioè l'energia di punto zero che possiamo scartare. Otteniamo

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d\mathbf{p} E_{\mathbf{p}} \left[b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right]. \quad (3.152)$$

Questa espressione può essere anche ottenuta da quella precedente illimitata inferiormente utilizzando il prodotto bene ordinato di operatori, con la regola aggiuntiva di un cambio di segno per inversione di operatori d e $d^\dagger$. Con le regole di commutazione potevo inserire infinite particelle tutte quante con lo stesso impulso e polarizzazione in un singolo stato; in altre parole nel singolo modo potevano essere inserite infinite particelle. Ora il singolo modo non può essere occupato da più di una particella, a causa del principio di esclusione. L'energia quindi risulta limitata inferiormente; per convenzione il limite inferiore, ovvero l'energia di punto zero, è posta uguale a zero.

3.5.3 Antisimmetria della Funzione d'onda

Ci domandiamo ora come sia fatto lo stato più generale di due particelle di tipo b . Esso sarà

$$\sum_{r_1, r_2=1}^2 \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 f_{r_1, r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) b_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) b_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) |0\rangle \quad (3.153)$$

dove la funzione $f_{r_1, r_2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ rappresenta esattamente la funzione d'onda di prima quantizzazione ovvero la densità di probabilità di trovare le particelle con quegli impulsi e polarizzazione. Poichè $b_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1)$ e $b_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle$ anticommutano, il loro prodotto è antisimmetrico; segue che anche la funzione d'onda delle due particelle di questo tipo (analogamente per le particelle di tipo d) deve essere antisimmetrica. Abbiamo quindi verificato che le particelle descritte dall'equazione di Dirac sono effettivamente dei fermioni. Il principio di esclusione di Pauli si può ricavare facilmente in questo formalismo notando che

$$b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = -b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = 0. \quad (3.154)$$

Ricordiamo che ha senso parlare di principio di esclusione di Pauli se gli stati di singola particella del sistema non dipendono dal numero di particelle presenti. L'esempio principe è quello dell'atomo di idrogeno: trascuriamo l'interazione tra gli elettroni in quanto questi sono sottoposti ad un forte potenziale coulombiano esterno. Tuttavia non è possibile definire lo stato di singola particella se queste sono interagenti: questo perchè l'introduzione delle altre particelle in un sistema costituito da una soltanto, modificherebbe gli stati di singola particella a causa dell'interazione tra di esse. Un esempio di questo tipo è l'atomo di elio in cui bisogna tenere conto della repulsione coulombiana. Il vero principio fondamentale e generale, è l'antisimmetria della funzione d'onda.

3.5.4 Calcolo dell'Impulso

Ora che ho ottenuto la giusta energia, posso costruire l'impulso spaziale. Prendiamo l'espressione del tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} \partial^\nu \bar{\psi} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.155)$$

e calcoliamo l'impulso spaziale

$$P^i = \int d\mathbf{x} T^{0i} = \int d\mathbf{x} \left(\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} \partial^i \psi_\alpha \right) = i \int d\mathbf{x} \left(\sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \partial^i \psi_\alpha \right) \quad (3.156)$$

ottenendo, in forma più compatta

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger (-i\nabla) \psi. \quad (3.157)$$

L'espressione è perfettamente analoga a quella precedentemente ricavata con l'energia: l'impulso è ottenuto come il valor medio della funzione d'onda di Dirac (se si può considerare tale) dell'operatore $-i\nabla$, ovvero l'impulso di prima quantizzazione. Le espressioni di seconda quantizzazione si ottengono formalmente mediando quelle di prima quantizzazione sulle funzioni d'onda (che ora sono degli operatori). Se inseriamo ora lo sviluppo generale per il campo di Dirac in questa ultima equazione, possiamo ottenere l'impulso in termini di operatori di creazione e distruzione

$$\mathbf{P} = \sum_{r=1}^2 \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \left(b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right) \quad (3.158)$$

dove nelle parentesi tonde abbiamo come al solito il numero di particelle di tipo b e di tipo d con polarizzazione r e impulso $\mathbf{p}$.

3.6 Momento Angolare del Campo di Dirac

Tra tutte le quantità che finora abbiamo calcolato manca ancora il momento angolare. Come abbiamo visto in precedenza il momento angolare riceve due contributi

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{ij} &= \int d\mathbf{x} \mathcal{M}^{ji}_0 = \int d\mathbf{x} \left[(x^i T^j_0 - x^j T^i_0) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} M_{ab}^{ij} \varphi_b(x) \right] \\ &= \left[(x^i \mathcal{P}^j(x) - x^j \mathcal{P}^i(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} M_{ab}^{ij} \varphi_b(x) \right]\end{aligned}\quad (3.159)$$

i primi due derivanti dal momento angolare *orbitale* e l'ultimo termine dal momento angolare *intrinseco* o di *spin*. Ora M_{ab}^{ij} avevamo visto essere pari a

$$M^{ij} = \frac{1}{4} [\gamma^i, \gamma^j]. \quad (3.160)$$

Calcoliamo ad esempio la terza componente del momento angolare intrinseco

$$\begin{aligned}M^{12} &= \frac{1}{4} [\gamma^1, \gamma^2] = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -[\sigma^1, \sigma^2] & 0 \\ 0 & -[\sigma^1, \sigma^2] \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} i \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.161)$$

Inserendo questo risultato dentro la parte di momento angolare intrinseco otteniamo

$$\int d\mathbf{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} M_{ab}^{ij} \varphi_b(x) = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} \psi^\dagger \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \psi \quad (3.162)$$

Se prendiamo una particella a riposo questo è l'unico contributo al momento angolare (il contributo orbitale si annulla). Ora la matrice di Pauli σ^3 ha la seguente espressione

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.163)$$

Ora se scegliamo lo spinore $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avremo che

$$\psi \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.164)$$

ottenendo per (3.162) 1/2. Analogamente se scegliamo lo spinore $\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ otterremo -1/2.

Abbiamo quindi dimostrato che il campo di Dirac è composto da particelle di spin 1/2 in quanto il momento angolare nel sistema a riposo lungo l'asse z può essere $\pm 1/2$.

Ricordiamo inoltre che i due contributi, orbitale e di spin, non si trasformano come un tensore doppio antisimmetrico, ma solo la loro somma ha senso relativisticamente. Ha senso quindi parlare di momento angolare totale per la covarianza.

3.7 Il Propagatore del Campo di Dirac

Vogliamo calcolarci la quantità

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle . \quad (3.165)$$

Riportiamo per semplicità le espressioni di ψ e $\bar{\psi}$ che servono nel calcolo

$$\begin{cases} \psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left(b_r(\mathbf{p}) u_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{ipx} \right) \\ \bar{\psi}_\beta(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{q}}}} \left(b_s^\dagger(\mathbf{q}) \bar{u}_\beta(\mathbf{q}, s) e^{iqx} + d_s(\mathbf{q}) \bar{v}_\beta(\mathbf{q}, s) e^{-iqx} \right) . \end{cases} \quad (3.166)$$

Nel braket con sopravvivono solo i termini $b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | b_s(\mathbf{q})$; gli altri si annullano. Otteniamo

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \sum_{r,s} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}}}} u_\alpha(\mathbf{p}, r) e^{-ipx} \langle 0 | b_r(\mathbf{p}) b_s^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle \bar{u}_\beta(\mathbf{q}, s) e^{iqx} ; \quad (3.167)$$

ora il termine nell'integrale può essere semplificato

$$\langle 0 | b_r(\mathbf{p}) b_s^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle = \langle 0 | \{ b_r(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{q}) \} | 0 \rangle = \delta_{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) . \quad (3.168)$$

Inserendo questa ultima espressione nella precedente equazione abbiamo

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} u_\alpha(\mathbf{p}, r) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, r) . \quad (3.169)$$

Riconosciamo il proiettore delle energie positive

$$\Lambda_+(p) = \left(\sum_{r=1}^2 u(\mathbf{p}, r) \bar{u}(\mathbf{p}, r) \right) = \frac{\not{p} + m}{2m} . \quad (3.170)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} = (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} i\Delta^+(x-y) , \end{aligned} \quad (3.171)$$

dove $\not{\partial}_x = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\Delta^+(x-y)$ è proprio la funzione già utilizzata nel caso del campo di Klein-Gordon. Sopprimendo gli indici di Dirac, possiamo dimostrare che $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ risolve l'equazione di Dirac $(i\not{\partial}_x - m) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = 0$. Infatti

$$(i\not{\partial}_x - m) (i\not{\partial}_x + m) i\Delta^+(x-y) = - \left[(\not{\partial}_x)^2 + m^2 \right] i\Delta^+(x-y) . \quad (3.172)$$

Se però calcoliamo $(\not{\partial})^2$ troviamo

$$(\not{\partial})^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu = \square , \quad (3.173)$$

per cui

$$- \left[(\not{\partial}_x)^2 + m \right] i\Delta^+(x-y) = - [\square + m] i\Delta^+(x-y) = 0 \quad (3.174)$$

perchè $\Delta^+(x-y)$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon. Possiamo ora effettuare il calcolo analogo per la quantità $\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle$; questa volta sopravvivono i termini $d_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | b_s(\mathbf{q})$; svolgendo i calcoli otteniamo

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \sum_r \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} v_\alpha(\mathbf{p}, r) \bar{v}_\beta(\mathbf{q}, s) \quad (3.175)$$

Riconosciamo il proiettore delle energie negative

$$- \Lambda_-(p) = \left(\sum_{r=1}^2 v(\mathbf{p}, r) \bar{v}(\mathbf{p}, r) \right) = \frac{\not{p} - m}{2m}. \quad (3.176)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \\ &= - (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} = (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} i\Delta^-(x-y). \end{aligned} \quad (3.177)$$

Riassumendo abbiamo calcolato due quantità

$$\begin{cases} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \\ \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = - (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)}; \end{cases} \quad (3.178)$$

sommando le due quantità otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} \langle 0 | \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y) \} | 0 \rangle &= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} i\Delta(x-y). \end{aligned} \quad (3.179)$$

Abbiamo trovato a secondo membro la ben nota funzione $\Delta(x-y)$ già incontrata nel caso del campo scalare. Questa $\Delta(x-y)$ conduce ad una teoria correttamente causale; infatti sappiamo che, se $x-y$ è di tipo spazio, essa si annulla identicamente e quindi l'anticommutatore è nullo a distanze di tipo spazio (quindi non solo a tempi uguali). Questo è un problema perchè se l'anticommutatore è 0 a distanze di tipo spazio, non è garantito che anche il commutatore lo sia; in altre parole rimane ancora da verificare che non ci sia interferenza tra due misure eseguite in due eventi di tipo spazio. Partendo dall'equazione precedente, posso calcolare il commutatore a distanze di tipo spazio semplicemente cambiando segno al secondo addendo; a distanze di tipo spazio la quantità nell'integrale non si annulla. È possibile quindi una violazione della causalità, ovvero trasmettere informazione a velocità superiore a quella della luce?

Si esce da questo problema limitando l'algebra delle osservabili di questa teoria; in altre parole restringiamo lo spazio degli stati ammissibili ad un sottospazio di Hilbert dello spazio degli stati

globale. Tale procedimento di restrizione è detto *criterio di superselezione*: esso limita il principio di sovrapposizione lineare degli stati. La regola si formalizza imponendo che non è possibile realizzare degli stati combinazione lineare di autostati con autovalore diverso dell'operatore $(-1)^F$ con F numero fermionico. In altre parole si impone l'impossibilità di avere stati che siano sovrapposizione di stati a numeri fermionici differenti; ad esempio non possiamo avere uno stato della forma

$$|B\rangle + |F\rangle$$

con $|B\rangle$ stato di tipo bosonico (senza fermioni) e $|F\rangle$ stato ad un fermione. Tale impossibilità implica che bisogna rinunciare a misurare il campo ψ ; infatti, come nel caso del campo elettromagnetico, per avere un campo macroscopico è necessario avere

$$\langle \alpha | \psi | \alpha \rangle \neq 0. \quad (3.180)$$

Sappiamo che gli stati che realizzano questa condizione sono gli stati coerenti, sovrapposizione di stati per numeri fermionici da 0 a ∞ . La regola di superselezione implica che gli stati coerenti per il campo di Dirac non siano ammissibili, da cui l'impossibilità di avere un campo ψ macroscopico. Infatti i valori medi sugli stati ammissibili dalla teoria fanno automaticamente 0

$$\langle B | \psi | B \rangle = 0 = \langle F | \psi | F \rangle \quad (3.181)$$

in quanto la ψ aumenta di uno il numero di fermioni. Gli unici stati che rendono il valor medio di ψ diverso da 0 sono queglii stessi che sono potenzialmente pericolosi per la causalità

$$\left(\langle B | + \langle F | \right) \psi \left(| B \rangle + | F \rangle \right) = \langle B | \psi | F \rangle + \langle F | \psi | B \rangle \neq 0. \quad (3.182)$$

Quindi nel momento in cui posso effettuare combinazioni lineari di stati con autovalori diversi associati all'operatore $(-1)^F$ corro il rischio di effettuare trasmissioni superluminari, in quanto ψ non commuta con se stesso a distanze di tipo spazio. Per uscire da questo problema ho quindi imposto che la ψ non sia una osservabile. Il criterio di superselezione si traduce quindi in una selezione delle osservabili che posso avere nella mia teoria. In generale un operatore O è osservabile se commuta con tutti l'operatore che dà la superselezione, in questo caso $(-1)^F$

$$\left[O, (-1)^F \right] = 0. \quad (3.183)$$

In meccanica quantistica sappiamo come postulato che qualsiasi operatore hermitiano è osservabile. In meccanica quantistica relativistica, per superare i problemi relativi alla causalità, non basta che l'operatore sia hermitiano, ma deve anche commutare con tutti gli operatori che determinano le regole di superselezione. Esistono molte altre regole di superselezione: una intuitiva può essere quella della carica, in quanto non si può costruire uno stato sovrapposizione di stati con cariche elettriche differenti. Se vale la (3.183) allora O è diagonalizzabile simultaneamente a $(-1)^F$ e quindi, dato uno stato di una natura fermionica, non si potrà mai effettuare una transizione ad uno stato con una natura fermionica differente. Naturalmente saranno osservabili operatori che posso costruire con il campo ψ . Ad esempio $\bar{\psi}\psi$ è una osservabile in quanto è composta da un numero pari di campi fermionici (le quantità non osservabili sono proprio quelle composte da un numero dispari di campi fermionici).

Calcoliamo ora il propagatore del campo di Dirac; ricordiamo che nel caso di Klein-Gordon avevamo

$$\langle 0 | T(\Phi(x), \Phi(y)) | 0 \rangle = i\Delta_F(x-y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-iq(x-y)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-iq(x-y)}}{q^2 - m^2} \quad (3.184)$$

Il prodotto tempo ordinato non è invariante di Lorentz, in quanto una trasformazione di Lorentz propria può invertire l'ordine temporale di due eventi; tuttavia la microcausalità fornisce comunque l'invarianza di Lorentz annullando il commutatore per eventi di tipo spazio. Nel caso di campo di Dirac abbiamo che il T-prodotto è definito come

$$T(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)) = \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \quad (3.185)$$

dove il segno $-$ è collegato al fatto che i campi anticommutano a distanze di tipo spazio. Anche qui abbiamo che, se $(x-y)$ è di tipo tempo, il prodotto tempo ordinato è un invariante di Lorentz; per distanze di tipo spazio invece i campi anticommutano e la microcausalità annulla il prodotto. La presenza del segno meno è quindi necessaria per conservare la covarianza di una teoria quantizzata con gli anticommutatori. Il propagatore di Dirac è definito come

$$\begin{aligned} iS_F(x-y) &= \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) (i\partial_x + m) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) (i\partial_x + m) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \\ &= \theta(x^0 - y^0) (i\partial_x + m) i\Delta^+(x-y) - \theta(y^0 - x^0) (i\partial_x + m) i\Delta^-(x-y) \end{aligned}$$

Ora si può dimostrare che vale

$$iS_F(x-y) = (i\partial_x + m) i\Delta_F(x-y) \quad (3.186)$$

semplicemente distinguendo i due casi $x^0 > y^0$ e $y^0 > x^0$ e utilizzando il teorema dei residui esattamente come avevamo fatto nel caso di Klein-Gordon. Esplicitando ora la (3.186) otteniamo

$$iS_F(x-y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}. \quad (3.187)$$

Ora abbiamo

$$p^2 - m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} p_\mu p_\nu = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \not{p}^2 \quad (3.188)$$

e quindi

$$\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} = \frac{\not{p} + m}{(\not{p} + m)(\not{p} - m)} = \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (3.189)$$

Otteniamo l'espressione finale per il propagatore di Dirac

$$iS_F(x-y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m} e^{-ip(x-y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (3.190)$$

3.8 Corrente Conservata per il Campo di Dirac

Riprendiamo la densità lagrangiana di Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi. \quad (3.191)$$

Le ψ in generale sono dei campi complessi avendo imposto la rappresentazione delle γ ; esiste tuttavia una rappresentazione reale chiamata rappresentazione di Majorana che non tratteremo. Poichè si tratta di campi complessi, esiste una trasformazione di fase per cui la densità lagrangiana è invariante

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \delta\psi(x) = i\alpha\psi(x) \\ \delta\bar{\psi}(x) = -i\alpha\bar{\psi}(x) \end{cases}. \quad (3.192)$$

Questa trasformazione viene detta *trasformazione di fase globale* (o di gauge, vedremo dopo il perchè). Questa è una *simmetria continua*, quindi posso applicare il teorema della Noether e trovare una corrente e conseguentemente una carica conservata. Naturalmente la carica conservata di Dirac coinciderà con quella ottenuta quando avevamo costruito il prodotto scalare. Abbiamo visto nel caso del campo scalare che la conservazione della corrente aveva questa forma

$$\partial_\mu J^\mu = \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \psi_a} \delta\psi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \bar{\psi}_a} \delta\bar{\psi}_a(x) \right) = 0; \quad (3.193)$$

poichè $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \psi_a} = 0$ abbiamo

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \bar{\psi}_a} \delta\psi_a(x) \right) = \partial_\mu \left(i\bar{\psi}_a \gamma^\mu (i\alpha\psi_a(x)) \right) = -\alpha \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \quad (3.194)$$

e quindi la corrente conservata è proprio

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.195)$$

Da questo segue che l'integrale della componente temporale della corrente è costante. Questa quantità è la carica; inserendo le espressioni di $\bar{\psi}$ e ψ soluzioni dell'equazione di Dirac otteniamo

$$Q = \int d\mathbf{x} J^0 = \sum_{r=1}^2 \int d\mathbf{p} \left(b_r^\dagger(\mathbf{p}) b_r(\mathbf{p}) - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) \right). \quad (3.196)$$

Possiamo interpretare fisicamente tale conservazione dicendo che la differenza tra il numero di particelle di tipo b e di tipo d deve restare costante nel tempo. Non possiamo ancora identificare questa quantità con la carica elettrica in quanto dobbiamo ancora vedere come si comporta questa carica in presenza di un campo elettromagnetico (finora abbiamo solo considerato campi liberi).

3.9 Parità

Tra le trasformazioni di Lorentz *non proprie*, vi sono il time reversal e la parità. Tratteremo solo la seconda

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = -\mathbf{x} \\ x^{0'} = x^0 \end{cases}. \quad (3.197)$$

che è una trasformazione di Lorentz in quanto preserva la misura di Minkowski. È una trasformazione di Lorentz non propria in quanto la $\Lambda^\mu_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ che ha determinante -1 . Non è quindi una trasformazione che possiamo scrivere come prodotto di tante trasformazioni infinite-sime. Se la fisica è covariante sotto una trasformazione di Lorentz Λ (quindi sia propria che non propria) deve esistere una trasformazione S che soddisfa

$$\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda). \quad (3.198)$$

Traduciamo questa equazione per la trasformazione della parità $\mathcal{P}$

$$\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu = \mathcal{P}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{P} \implies \begin{cases} \mathcal{P}^{-1} \gamma^0 \mathcal{P} = \gamma^0 \\ \mathcal{P}^{-1} \gamma^i \mathcal{P} = -\gamma^i. \end{cases} \quad (3.199)$$

Dobbiamo ora chiederci se esiste una espressione per $\mathcal{P}$ che verifichi questo set di 4 equazioni. Poichè $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$ si può facilmente notare che la trasformazione che corrisponde alla parità è γ^0 . Sotto la trasformazione di parità lo spinore di Dirac si trasforma in questo modo

$$\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x). \quad (3.200)$$

Naturalmente la forma dell'equazione di Dirac sotto questo tipo di trasformazioni non cambia perchè abbiamo trovato una S soluzione per la parità.

Vediamo ora come si comportano sotto trasformazioni di parità i covarianti di Dirac bilineari.

- **I:** Quantità $\bar{\psi}\psi$;
iniziamo con il vedere come si trasforma $\bar{\psi}'(x')$

$$\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x) \implies \psi'^{\dagger}(x') = \psi^{\dagger}(x) \gamma^0 \implies \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \quad (3.201)$$

e quindi abbiamo che

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^0 \psi(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad (3.202)$$

ovvero $\bar{\psi}'(x') \psi'(x')$ si trasforma anche per parità come uno *scalare*.

- **γ^μ :** Quantità $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$;

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi(x) \implies \begin{cases} \bar{\psi}'(x') \gamma^0 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) \\ \bar{\psi}'(x') \gamma^i \psi'(x') = -\bar{\psi}(x) \gamma^i \psi(x). \end{cases} \quad (3.203)$$

poichè $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$. $\bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x')$ si trasforma quindi sotto parità come un *quadrivettore*.

- **γ^5 :** Quantità $\bar{\psi}\gamma^5\psi$;

$$\bar{\psi}'(x') \gamma^5 \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi(x) = -\bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) \quad (3.204)$$

in quanto in generale γ^5 anticommuta con γ^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$. Questa quantità si comporta come uno *pseudoscalare* sotto trasformazioni di parità.

- **$\gamma^5\gamma^\mu$:** Quantità $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$;

Si comporta in maniera opposta a γ^μ , ovvero come uno *pseudovettore* (cambia segno la componente temporale ma non quelle spaziali).

Capitolo 4

Teoria Delle Interazioni: QED

Finora abbiamo trattato il caso di particelle libere costruendo 3 spazi di Hilbert, uno per le particelle scalari, uno per i fotoni e uno per elettroni e positroni. Ora che abbiamo introdotto questi campi liberi, vogliamo estendere la teoria per permettere che tali campi interagiscano sviluppando quella che prende il nome di *elettrodinamica quantistica* o QED, ovvero l'interazione radiazione-materia fra il campo di radiazione (campo elettromagnetico) e i campi di materia (elettroni e/o positroni). Possiamo quindi mettere insieme queste teorie semplicemente effettuando un prodotto tensoriale di spazi. Iniziamo pertanto facendo interagire fotoni con il campo di Dirac; lo spazio di Hilbert degli stati sarà il prodotto

$$\mathcal{H}_{e^+e^-} \otimes \mathcal{H}_\gamma . \quad (4.1)$$

Gli operatori con cui avremo a che fare sono

$$\begin{array}{lll} a_\lambda(\mathbf{p}), & a_\lambda(\mathbf{p}) & \text{Fotoni} \\ b_r(\mathbf{p}), & b_r^\dagger(\mathbf{p}) & \text{Elettroni} \\ d_r(\mathbf{p}), & d_r^\dagger(\mathbf{p}) & \text{Positroni.} \end{array} \quad (4.2)$$

Lo stato di vuoto sarà ora definito dal prodotto tensoriale degli stati di vuoto dei due spazi di partenza. Il vettore di vuoto sarà quindi annichilato da qualsiasi operatore di annichilazione

$$a_\lambda(\mathbf{p}) |0\rangle = b_r(\mathbf{p}) |0\rangle = d_r(\mathbf{p}) |0\rangle = 0 . \quad (4.3)$$

Quando andrò ad applicare allo stato di vuoto gli operatori di creazione otteniamo stati ad un fotone, ad un elettrone, ad un positrone e tutte le loro combinazioni. Ovviamente avendo eseguito un prodotto tensoriale di spazi, abbiamo gradi di libertà indipendenti; pertanto gli operatori dei fotoni commutano con quelli degli elettroni e dei positroni. Vogliamo ora fare interagire i due campi (permettendo quindi uno scambio di energia e impulso): questo processo di interazione avverrà attraverso una equazione di Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |A\rangle = H |A\rangle , \quad (4.4)$$

dove $|A\rangle$ è un generico vettore di stato dello spazio di Hilbert (4.1). L'interazione è presente all'interno dell'Hamiltoniana totale H

$$H = H_0 + H_I \quad (4.5)$$

dove H_0 è data dalla somma delle Hamiltoniane libere dei campi che stiamo prendendo in considerazione e H_I è l'Hamiltoniana di interazione di questi campi. In generale considereremo H_0 come una Hamiltoniana semplice in modo tale che siano risolti il problema agli autovalori e autovettori. D'altra parte nel nostro caso sono la somma degli hamiltoniane libere di elettroni e fotoni di cui sappiamo già tutto. H_I invece, sarà un oggetto molto più complicato che mi impedisce di conoscere la soluzione esatta del problema (in generale può avere prodotti dei campi di ogni ordine). Possiamo però utilizzare la teoria perturbativa ed ottenere soluzioni approssimate a qualunque ordine; dovremo quindi sviluppare in serie rispetto ad un parametro piccolo contenuto all'interno della stessa Hamiltoniana di interazione H_I . Per fare ciò dobbiamo modificare leggermente il modo di trattare stati e operatori nella nostra teoria.

4.1 Schema di Interazione

Nello schema di Schrödinger, tutti gli operatori non dipendono dal tempo (tranne quelli che dipendono ad esempio da un campo elettrico esterno variabile). Di conseguenza, tutti i loro autovettori sono fermi nel tempo; tutti tranne uno, ovvero quello che corrisponde all'evoluzione del sistema in esame. Pertanto, se l'Hamiltoniana del sistema non dipende dal tempo lo stato del sistema evolverà nel seguente modo

$$|\psi, t\rangle = e^{-iHt} |\psi_0\rangle \quad (4.6)$$

con $|\psi_0\rangle$ vettore di stato all'istante iniziale. Se osserviamo l'operatore di evoluzione temporale per l'equazione di Schrödinger notiamo che non possiamo spezzarlo nel prodotto di due propagatori uno relativo a H_0 e uno relativo a H_I in quanto in generale queste due Hamiltoniane non commutano. Per procedere ad uno sviluppo perturbativo, risulta più comodo abbandonare lo schema di Schrödinger (in cui la variabile tempo è privilegiata) e passare allo *schema di interazione*. Chiamiamo quindi $|\psi\rangle_s$ lo stato del sistema nella descrizione di Schrödinger e A_s una analoga osservabile. Lo schema di interazione è definito a partire da quello di Schrödinger tramite la trasformazione di stati e operatori

$$|\psi\rangle_I = e^{iH_0t} |\psi\rangle_s, \quad A_I = e^{iH_0t} A_s e^{-iH_0t}. \quad (4.7)$$

Come sappiamo la meccanica quantistica è invariante sotto trasformazioni unitarie, quindi le previsioni fisiche fornite nel nuovo schema devono essere identiche a quelle ottenute nello schema di Schrödinger. In effetti si vede immediatamente che il valore di aspettazione di un operatore risulta

$${}_I\langle\psi|A_I|\psi\rangle_I = {}_s\langle\psi|e^{-iH_0t} A_I e^{iH_0t} |\psi\rangle_s = {}_s\langle\psi|A_s|\psi\rangle_s. \quad (4.8)$$

Notiamo che, se non esistesse l'Hamiltoniana di interazione, la descrizione di interazione coinciderebbe con quella di Heisenberg (nel quale le osservabili sono dipendenti dal tempo, ma non i vettori di stato). Prendendo lo stato nello schema di interazione al tempo t espresso in funzione dello stato nello schema di Schrödinger allo stesso tempo

$$|\psi, t\rangle_I = e^{iH_0t} |\psi, t\rangle_s \quad (4.9)$$

possiamo ricavare l'equazione di evoluzione per il vettore di stato nello schema di interazione

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle_I &= -H_0 e^{iH_0t} |\psi, t\rangle_s + e^{iH_0t} i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle_s = -H_0 e^{iH_0t} |\psi, t\rangle_s + e^{iH_0t} (H_0 + H_I) |\psi, t\rangle_s \\ &= e^{iH_0t} H_I |\psi, t\rangle_s = \left(e^{iH_0t} H_I e^{-iH_0t} \right) e^{iH_0t} |\psi, t\rangle_s \end{aligned} \quad (4.10)$$

che si scrive in questo modo

$$i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle_I = H_I(t) |\psi, t\rangle_I, \quad (4.11)$$

con $H_I(t) = (e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t})$ Hamiltoniana d'interazione nello schema di interazione, che ha acquisito una esplicita dipendenza dal tempo (questo perchè abbiamo effettuato una trasformazione unitaria dipendente dal tempo). Abbiamo così ottenuto che gli operatori evolvono secondo la teoria libera, che già conosciamo (equazioni di Maxwell e Dirac) e abbiamo isolato l'Hamiltoniana di interazione, che tratteremo come una piccola perturbazione. D'ora in poi sottintenderemo sempre di essere nello schema di interazione (che è comodo per fare lo sviluppo perturbativo).

4.2 Teoria Perturbativa

Il punto di partenza è riscrivere l'equazione (4.11) in forma integrale

$$i \int_{t_0}^t dt_1 \frac{d|\psi(t_1)\rangle}{dt_1} = \int_{t_0}^t H_I(t_1) |\psi(t_1)\rangle dt_1 \implies |\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) |\psi(t_1)\rangle dt_1 \quad (4.12)$$

con $|\psi(t_0)\rangle$ come condizione iniziale. Con questo passaggio abbiamo isolato il contributo di ordine 0 dello sviluppo ossia $|\psi(t_0)\rangle$; una teoria senza interazioni è descritta solo da questo termine, ovvero il vettore di stato rimane uguale a se stesso nell'evoluzione temporale. A questo punto iteriamo il procedimento sostituendo $|\psi(t_1)\rangle$ nella precedente equazione

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\psi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) \left[|\psi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) |\psi(t_2)\rangle dt_2 \right] dt_1 \\ &= |\psi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) |\psi(t_0)\rangle + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |\psi(t_2)\rangle, \end{aligned} \quad (4.13)$$

con $t_1 \in [t_0, t]$ e $t_2 \in [t_0, t_1]$ e quindi $t \geq t_1 \geq t_2$. Iterando infinite volte, si ottiene

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) |\psi(t_0)\rangle, \quad (4.14)$$

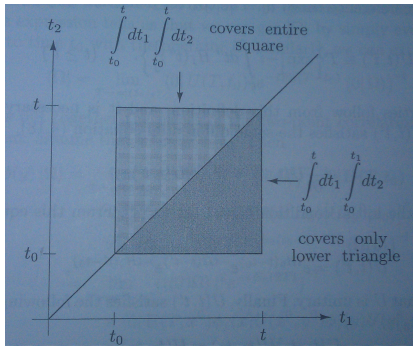


Figura 4.1. Dominio di Integrazione al secondo ordine.

con $t \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n$. Abbiamo ottenuto lo sviluppo perturbativo cercato. Ora lo dobbiamo scrivere in una forma più comoda per i calcoli. Possiamo notare che il prodotto delle Hamiltoniane di interazione $H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)$ è ordinato temporalmente: agisce prima l'Hamiltoniana al tempo più grande. Questa è proprio la definizione di T-prodotto o prodotto tempo ordinato. Ora in generale le Hamiltoniane di interazione calcolate a tempi diversi non commutano tra di loro. Quando ci inseriamo il T-prodotto, questo per definizione è commutativo ovvero non importa l'ordine in cui inserisco il prodotto delle Hamiltoniane al suo interno (il risultato sarà sempre lo stesso!). L'inserimento del T-prodotto ci permette di effettuare una semplificazione notevole, ovvero estendere ogni integrale fino a t e dividere per $n!$. Per verificarlo prendiamo il

caso $n = 2$; il dominio di integrazione sarà quello rappresentato in Figura (4.1). Poichè la funzione che sto integrando è *simmetrica* grazie al T-prodotto, se estendiamo il dominio di integrazione di t_2 fino a t è facile vedere che il risultato dell'integrale raddoppia. Nel caso in cui ho il T-prodotto di n termini è facile verificare che il dominio di integrazione è moltiplicato per $n!$, e quindi per la simmetria del T-prodotto, anche il risultato dell'integrale. Tenendo conto di questi accorgimenti otteniamo la nota *formula di Dyson* o *sviluppo di Dyson*

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)) |\psi(t_0)\rangle, \quad (4.15)$$

o simbolicamente

$$|\psi(t)\rangle = T \left(e^{-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \right) |\psi(t_0)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (4.16)$$

Questa è una equazione estremamente complessa: la sua espressione è già molto complicata a partire dal secondo ordine. Per fortuna la *costante di accoppiamento*, ovvero quel parametro contenuto nella Hamiltoniana di interazione che ci permette di trattarla come perturbazione, nel nostro caso è molto piccola in quanto coincide con la costante di struttura fine $1/137$. Questo ha permesso di arrivare fino al terzo ordine nel calcolo. Vi sono stati anche dei problemi concettuali in quanto molti di questi termini sono infiniti; Feynman Tomonaga e Schwinger riuscirono a tramutare questi infiniti in numeri finiti grazie alla teoria della rinormalizzazione. Non ci occuperemo di questo problema in quanto ci limiteremo al primo ordine, dove i termini sono finiti. Ritorniamo alla formula (4.15): questa risolve il problema dell'evoluzione temporale dello stato, ovvero ci dice come si evolve lo stato da un istante t_0 ad un istante t generico. Questa formula è quindi particolarmente adatta al calcolo perturbativo di processi di diffusione. Immaginiamo quindi un qualsiasi esperimento di diffusione. Abbiamo uno stato iniziale preparato ad un tempo $t_0 = -\infty$; successivamente lo stato si evolve e le particelle si avvicinano fino a sovrapporre i loro pacchetti d'onda; poi si riallontanano fino a diventare libere; a questo punto ad un tempo $t = \infty$ le particelle (che si sono allontanate notevolmente dal centro di scattering), arrivano ai nostri rilevatori che ne provocano il collasso su uno stato. Definiamo quindi la matrice S o *matrice di scattering* come

$$S = U(+\infty, -\infty) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n T(H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)) \quad (4.17)$$

e se ci riferiamo alla densità di energia di interazione, possiamo scriverla nella forma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T(\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)). \quad (4.18)$$

Quando si esegue un esperimento, si ha uno stato iniziale $|\psi_i\rangle$, in cui ad esempio vi sono particelle lontane che non interagiscono, relativo all'istante di tempo $t = -\infty$ e nel momento in cui si esegue una misura, lo stato evoluzione temporale $S|\psi_i\rangle$ *collassa* istantaneamente in uno stato finale $|\psi_f\rangle$, relativo all'istante di tempo $t = +\infty$, selezionato dal risultato della misura. Quindi il modulo quadro dell'elemento di matrice S dato dal termine $|\langle\psi_f|S|\psi_i\rangle|^2$ rappresenta, in base ai principi della meccanica quantistica, la probabilità che lo stato iniziale $|\psi_i\rangle$, per effetto dell'evoluzione temporale, collassi, a seguito dell'operazione di misura in uno stato finale $|\psi_f\rangle$. Osseviamo che l'ordine zero della matrice S non riveste alcun interesse perchè coincide con l'identità e rappresenta la situazione in cui le particelle non interagiscono. In altre parole, la matrice S all'ordine zero

riproduce la teoria libera e conferma l'unitarietà dell'operatore di evoluzione temporale. Notare che la formula di Dyson non vale solo in meccanica quantistica relativistica (non abbiamo utilizzato la relatività).

4.3 Calcolo dell'Hamiltoniana di Interazione

Esaminiamo come detto in precedenza, un sistema a elettroni positroni e fotoni. Vogliamo trovare l'espressione dell'Hamiltoniana di interazione H_I . Per arrivare alla descrizione Hamiltoniana, dobbiamo prima passare per quella lagrangiana. Per ottenere le equazioni per i campi interagenti dovrò quindi scrivere la lagrangiana della teoria; unendo le due lagrangiane dei campi liberi si ottiene

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Nella teoria classica, l'interazione tra campo e particella è descritta dalla sostituzione minimale $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ e $H \rightarrow H - e\Phi$ ($e > 0$). È quindi facile convincersi che, in 4 dimensioni la sostituzione minimale debba essere

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu, \quad (4.20)$$

ossia

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu, \quad (4.21)$$

che prende il nome di *derivata covariante*. Questa, sostituita nella Lagrangiana libera $\mathcal{L}_0$, fornirà quindi la Lagrangiana totale fondamentale per lo studio dell'elettrodinamica quantistica

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_M^{(0)}} + \underbrace{\bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi}_{\mathcal{L}_D^{(0)}} + \underbrace{e\bar{\psi} \not{A} \psi}_{\mathcal{L}_I}. \quad (4.22)$$

Questa Lagrangiana contiene il termine di interazione $\mathcal{L}_I = e\bar{\psi} \not{A} \psi$. Osserviamo che tale Lagrangiana è *locale* perchè tutti i campi sono calcolati nel medesimo punto x . Poichè la lagrangiana libera è invariante di Lorentz e inoltre la lagrangiana di interazione è scalare in quanto prodotto del covariante bilineare quadrivettoriale $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ per il quadrivettore A_μ , concludiamo che la lagrangiana totale risulta invariante di Lorentz, ovvero uno scalare. Inoltre abbiamo visto che la lagrangiana libera è invariante sotto trasformazioni simultanee (con α costante reale)

$$\begin{cases} A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \\ \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (4.23)$$

cioè di gauge per il potenziale vettore e di fase globale per i campi $\bar{\psi}$ e ψ . Ci domandiamo allora sotto quali trasformazioni dei campi risulti invariante di gauge la lagrangiana totale. Con una trasformazione di gauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, la lagrangiana (4.22) subisce la trasformazione

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - e\bar{\psi} (\not{\partial} \Lambda) \psi, \quad (4.24)$$

poichè il termine elettromagnetico $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ risulta invariante di gauge. Si potrebbe pensare allora che nell'azione

$$S = \int d^4x (\mathcal{L} - e\bar{\psi} (\not{\partial} \Lambda) \psi) \quad (4.25)$$

l'ultimo termine non dia contributo perchè integrando per parti, si avrebbe

$$\int d^4x \left(\bar{\psi} (\not{\partial} \Lambda) \psi \right) = \int d^4x \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \Lambda \right) = - \int d^4x \Lambda \partial_\mu \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) = 0. \quad (4.26)$$

Tuttavia, analizzando la relazione di conservazione della corrente di Dirac, ci si rende conto che questa risulta conservata solo lungo le equazioni del moto e non con generiche $\bar{\psi}$ e ψ . Poichè la corrente $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ non si conserva per generiche $\bar{\psi}$ e ψ , segue che per cancellare il termine aggiuntivo $-e\bar{\psi}(\not{\partial}\Lambda)\psi$ presente nella lagrangiana totale quando si effettua una trasformazione di gauge, occorre determinare un'opportuna trasformazione di fase dei campi $\bar{\psi}$, ψ . A tale scopo consideriamo quella che prende il nome di *trasformazione unitaria globale* in cui l'esponente non sia una costante α , ma sia invece una funzione $g(x)$ del punto x

$$\begin{cases} A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \\ \psi(x) \rightarrow e^{ig(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-ig(x)} \bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (4.27)$$

Determiniamo ora la $g(x)$ imponendo l'invarianza di gauge della lagrangiana (4.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e^{-ig(x)} \bar{\psi}(x) (i\not{\partial} - m) e^{ig(x)} \psi(x) - e\bar{\psi} \not{A} \psi - e\bar{\psi} (\not{\partial} \Lambda) \psi \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x) (i\not{\partial} - m) \psi(x) - e\bar{\psi} \not{A} \psi - e\bar{\psi} (\not{\partial} g + \not{\partial} \Lambda) \psi \end{aligned} \quad (4.28)$$

in cui si riconosce immediatamente che l'ultimo termine si annulla se prendiamo $g(x) = -e\Lambda(x)$

$$\begin{cases} A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \\ \psi(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)} \bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (4.29)$$

La lagrangiana totale (4.22) è quindi invariante sotto un gruppo di trasformazioni *più ampio* in quanto le trasformazioni del campo di Dirac sono *locali*, ovvero hanno una fase variabile nello spazio-tempo. Comunque dalla simmetria (4.29) non discende nessuna corrente conservata in più rispetto a quella ricavata dalla simmetria (4.23) perchè le grandezze conservate si ottengono da una simmetria di fase globale.

Nel caso di interazione, le equazioni del moto che si ottengono dalla lagrangiana (4.22) mediante variazione rispetto ai campi ψ e A_μ sono le equazioni accoppiate

$$\begin{cases} \partial_\nu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ (i\not{\partial} - m) \psi = e\not{A} \psi \end{cases} \quad (4.30)$$

in cui il campo dell'elettrone *influenza* il campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ e, viceversa, il campo A_μ del fotone influenza il campo di Dirac. Notiamo che la quadricorrente conservata nell'equazione di Dirac è diventata in questo caso la corrente elettrica sorgente del campo elettromagnetico. Notare che tale corrente $J^\mu = e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ è conservata lungo le equazioni del moto grazie al teorema della Noether anche per questa teoria. Per vederlo basta semplicemente prendere una $\Lambda(x) = \alpha$ costante (non c'è la gauge), in modo tale da avere una trasformazione di fase globale. Le equazioni che ci siamo ricavati non sono però lineari e in generale non sappiamo integrarle esattamente. Dobbiamo

quindi trovare la corrispondente Hamiltoniana di interazione e utilizzare lo sviluppo perturbativo. Facendo una trasformazione di Legendre otteniamo l'Hamiltoniana

$$H = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_b} \dot{\psi}_b - \mathcal{L} \right) = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} \dot{\psi}_a - \mathcal{L}_D^{(0)} \right) + \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} \dot{A}_i - \mathcal{L}_M^{(0)} - \mathcal{L}_I \right), \quad (4.31)$$

avendo notato che la lagrangiana totale del sistema non dipende dalla derivata temporale del campo $\bar{\psi}_a$. Poichè $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = \frac{\partial \mathcal{L}_D^{(D)}}{\partial \dot{\psi}_a}$, il primo termine riproduce semplicemente l'Hamiltoniana di Dirac $H_D^{(0)}$. Il secondo termine va invece calcolato. Ricordando che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{(0)} &= -\frac{1}{4} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \end{aligned}$$

abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_M^{(0)}}{\partial \dot{A}_i} = -\frac{1}{2} \left(-(\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) + (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) \right) = (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = F^{0i}. \quad (4.32)$$

Quindi

$$H = H_D^{(0)} + \int d\mathbf{x} \left(F^{0i} \dot{A}_i + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + e \bar{\psi} \not{A} \psi \right). \quad (4.33)$$

Generalizziamo ora quanto detto nel Capitolo 2 nel paragrafo Gauge di Coulomb. Mettiamoci nella gauge di Coulomb $\partial_k A^k = 0$. L'equazione del moto per A^0 veniva dalla componente temporale dell'equazione $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu = 0$. Calcoliamocela ora quando $J^\mu \neq 0$

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \partial_k F^{0k} = \partial_k (\partial^k A^0 - \partial^0 A^k) = J^0 \implies \boxed{\nabla^2 A^0 = -J^0}; \quad (4.34)$$

questa è una equazione di Poisson (quando $J^\mu = 0$ era di Laplace: $A^0 = 0$ perchè armonica in tutto lo spazio), e sappiamo la sua soluzione

$$\boxed{A^0(\mathbf{x}, x^0) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{y} \frac{J^0(\mathbf{y}, x^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{y} \frac{\bar{\psi}(\mathbf{y}, x^0) \gamma^0 \psi(\mathbf{y}, x^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}. \quad (4.35)$$

Esaminiamo ora i primi due termini nell'integrale della equazione (4.33). Integrando per parti e utilizzando la Gauge di Coulomb si ha

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \left(F^{0i} \dot{A}_i + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right) &= \\ &= \int d\mathbf{x} \left((\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \dot{A}_i + \frac{1}{2} (\partial^i A^0 \partial_i A^0 - \partial^i A^0 \partial_0 A^i - \partial^0 A^i \partial_i A_0 + \partial^0 A^i \partial_0 A_i) \right) \\ &= \int d\mathbf{x} \left(-\dot{A}^i \dot{A}_i + \frac{1}{2} \partial^i A^0 \partial_i A_0 + \frac{1}{2} \dot{A}^i \dot{A}_i \right) = \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \dot{A}^2 + \frac{1}{2} \partial^i A^0 \partial_i A_0 \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

e inserendo all'interno di (4.33) otteniamo

$$H = H_D^{(0)} + \underbrace{\int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \dot{A}^2 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right)}_{H_M^{(0)}} + \underbrace{\int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \partial^i A^0 \partial_i A_0 + e \bar{\psi} \not{A} \psi \right)}_{H_I}. \quad (4.37)$$

Ora modifichiamo l'Hamiltoniana di interazione integrando ancora per parti e utilizzando (4.34)

$$\begin{aligned} H_I &= \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \partial^i A^0 \partial_i A_0 + e \bar{\psi} \not{A} \psi \right) = \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} A_0 \nabla^2 A^0 + A_0 J^0 + e A_i \bar{\psi} \gamma^i \psi \right) \\ &= \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2} A_0 J^0 + A_0 J^0 + e A_i \bar{\psi} \gamma^i \psi \right) = \int d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} A_0 J^0 + e A_i \bar{\psi} \gamma^i \psi \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

sostituendo l'espressione di A_0 trovata in precedenza, otteniamo

$$H_I = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{J^0(\mathbf{y}, x^0) J^0(\mathbf{x}, x^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + e \int d\mathbf{x} A_i \bar{\psi} \gamma^i \psi, \quad (4.39)$$

dove, ricordiamo sempre $J^0(\mathbf{y}, x^0) = \bar{\psi}(\mathbf{y}, x^0) \gamma^0 \psi(\mathbf{y}, x^0)$ e similamente per $J^0(\mathbf{x}, x^0)$. Osserviamo che questa energia (che sembrerebbe rappresentare l'energia coulombiana di un sistema di cariche, definita positiva) presenta un problema di inconsistenza con la relatività perchè l'integrale doppio, avendo nel proprio integrando il prodotto di due correnti calcolate in punti distinti, costituisce dunque un termine di *azione a distanza*, ovvero un termine *non locale* che contraddice i principi della relatività. Inoltre l'ultimo termine non è un quadrivettore perchè ha solo parte spaziale. Vogliamo anticipare tuttavia che nell'ambito della matrice S l'integrale doppio si cancellerà e il contributo sarà dato solo dal secondo termine.

4.4 Il Teorema di Wick

Sappiamo che, nella teoria delle perturbazioni che abbiamo costruito, per ottenere il contributo di ordine n è necessario calcolare i prodotti tempo ordinati di n operatori. Il teorema di Wick stabilisce una relazione tra il *T-prodotto* di operatori calcolati in punti distinti dello spazio-tempo e il *prodotto normale* degli stessi operatori, dove, come ricordiamo, il prodotto normale è quello in cui gli operatori di frequenze negative sono tutti a sinistra di tutti gli operatori di frequenze positive (vedi Patri). Il teorema di Wick è un teorema di tipo *combinatorio* che esprime in una forma più conveniente il T-prodotto di un numero arbitrario di operatori di campo liberi. Supponiamo quindi di avere dei campi liberi $A, B, C, \dots, Z$, allora

$$\begin{aligned} T(AB \dots Z) &= N(AB \dots Z) + N(\overline{AB} \dots Z) + N(\overline{ABC} \dots Z) + \dots + N(\overline{AB \dots Z}) \\ &\quad + \text{termini con una contrazione} + N(\overline{AB} \overline{CD} \dots Z) \\ &\quad + \text{termini con due contrazione} + \text{tutte le altre possibili contrazioni} \end{aligned} \quad (4.40)$$

dove N è il prodotto normale e dove abbiamo definito l'operazione di contrazione per un prodotto di operatori

$$\overline{AB} = \langle 0 | T(AB) | 0 \rangle \quad (4.41)$$

ovvero quello che avevamo chiamato il *propagatore*. Se $A, B, C, \dots, Z$ sono campi di tipo bosonico non ci sono problemi. Se invece sono campi fermionici, bisogna tenere conto dell'anticommutatività dei campi e quindi inserire un segno $-$ ogni volta ne scambiamo due. Ad esempio per un termine del tipo $N(\overline{ABC})$ è necessario prima anticommutare C con B fino ad averlo adiacente all'operatore A con cui va contratto. Bisogna quindi inserire un termine $(-1)^n$ dove n è il numero di scambi (in questo caso pari a 1). L'ulteriore prescrizione al teorema di Wick è che non vanno contratti gli

operatori che sono già ordinati normalmente e calcolati nello stesso punto dello spazio-tempo. Il teorema di Wick ora motiva i calcoli per trovare le espressioni dei propagatori. L'unico propagatore che non abbiamo calcolato, perchè molto più complicato è quello del fotone; questo calcolo è proprio l'oggetto del calcolo del prossimo paragrafo.

4.5 Il Propagatore del Fotone

In analogia con i casi precedenti definiamo il *propagatore del fotone* come

$$\langle 0 | T(A^i(x) A^j(y)) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | A^i(x) A^j(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^j(y) A^i(x) | 0 \rangle \quad (4.42)$$

dove A^j è il più generale campo elettromagnetico nella gauge di Coulomb

$$A^i(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\mathbf{p}|}} \left(a_r(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) e^{-ip \cdot x} + a_r^\dagger(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) e^{ip \cdot x} \right), \quad A^0 = 0. \quad (4.43)$$

Dopo aver dimostrato che tale propagatore del fotone dipende effettivamente solo dalla differenza $x - y$, indichiamo il propagatore del fotone con la notazione di Feynman

$$iD_F^{ij}(x - y) = \langle 0 | T(A^i(x) A^j(y)) | 0 \rangle \quad (4.44)$$

e ricaviamo la sua rappresentazione integrale nello spazio degli impulsi. A tale scopo calcoliamo preliminarmente il valor medio nel vuoto dei due commutatori

$$\langle 0 | [A^i(x), A^j(y)] | 0 \rangle \quad \text{e} \quad \langle 0 | [\dot{A}^i(x), A^j(y)] | 0 \rangle. \quad (4.45)$$

Iniziamo calcolando

$$\begin{aligned} \langle 0 | A^i(x) A^j(y) | 0 \rangle &= \sum_{s,r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\sqrt{|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}} \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{q}, s) \langle 0 | a_r(\mathbf{p}) a_s^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle e^{-ip \cdot x} e^{-iq \cdot y} \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} \left[\sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r) \right] e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

e in modo del tutto analogo, si ottiene

$$\langle 0 | A^j(y) A^i(x) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} \left[\sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r) \right] e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (4.47)$$

Per determinare dunque il primo valor medio nella (4.45), occorre calcolare la somma all'interno della parentesi quadra nelle precedenti equazioni, i cui addendi sono i prodotti delle componenti dei vettori di polarizzazione. Osservando che le relazioni con indici solo spaziali non sono compatibili con una teoria covariante, "immergiamo" ogni vettore tridimensionale in un quadrivettore la cui componente temporale sia zero e calcoliamo la somma all'interno della parentesi quadra con il formalismo quadridimensionale. Per questo consideriamo i quattro quadrivettori ortonormali nella metrica di Minkowski

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, 1) \end{pmatrix} & \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{p}, 2) \end{pmatrix} \\ p^\mu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{p}/|\mathbf{p}| \end{pmatrix} & \eta^\mu &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

dove $\varepsilon(\mathbf{p}, 1)$ e $\varepsilon(\mathbf{p}, 2)$ sono i vettori di polarizzazione ortonormali sul piano ortogonale al vettore $\mathbf{p}$. Possiamo quindi riscrivere la somma nella parentesi quadra considerando indici non più solo spaziali ma quadridimensionali μ, ν , in modo da dimostrare che per tale somma vale la relazione

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, r) = -g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu + \eta^\mu \eta^\nu \quad (4.49)$$

la quale ha la forma di una relazione di completezza. Per la dimostrazione procediamo considerando tutte le combinazioni di indici:

- per $\mu = \nu = 0$ l'uguaglianza è immediata;
- se un indice è zero e l'altro è spaziale, l'uguaglianza è ancora immediata;
- se entrambi gli indici sono spaziali, consideriamo la matrice ortogonale M di ordine 3 avente per colonne le componenti spaziali dei quadrivettori $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 1)$, $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 2)$, p^μ

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon^1(\mathbf{p}, 1) & \varepsilon^1(\mathbf{p}, 2) & p^1 \\ \varepsilon^2(\mathbf{p}, 1) & \varepsilon^2(\mathbf{p}, 2) & p^2 \\ \varepsilon^3(\mathbf{p}, 1) & \varepsilon^3(\mathbf{p}, 2) & p^3 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

e l'uguaglianza (4.49) discende se scriviamo esplicitamente la proprietà di una matrice ortogonale espressa come $MM^T = \mathbb{I}$.

A questo punto allora il primo valor medio nella (4.45) si ottiene sottraendo questi i due risultati precedentemente trovati e sostituendo lo sviluppo (4.49), ovvero, con indici quadridimensionali

$$\langle 0 | [A^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle = \int \frac{-g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu + \eta^\mu \eta^\nu}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] d\mathbf{p} = 0. \quad (4.51)$$

Tale valore medio è risultato nullo perchè l'integrale è dispari sotto cambiamento di variabile $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ che possiede jacobiano uguale a 1 e lascia quindi invariato il differenziale. Per calcolare il secondo valor medio nella (4.45), ricaviamo l'espressione della derivata temporale del campo $\mathbf{A}$

$$\dot{A}^i(\mathbf{x}) = -i \sum_{r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|}{2}} (a_r(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) e^{-ip \cdot x} - a_r^\dagger(\mathbf{p}) \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) e^{ip \cdot x}). \quad (4.52)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \dot{A}^i(x) A^j(y) | 0 \rangle &= -i \sum_{s,r=1}^2 \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{2(2\pi)^3} \sqrt{\frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{q}|}} \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{q}, s) \langle 0 | a_r(\mathbf{p}) a_s^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle e^{-ip \cdot x} e^{-iq \cdot y} \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r) \right] e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

e in modo del tutto analogo, si ottiene

$$\langle 0 | A^j(y) \dot{A}^i(x) | 0 \rangle = \frac{i}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r) \right] e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (4.54)$$

A questo punto il secondo valor medio nella (4.45) si ottiene sottraendo i due risultati precedenti e sostituendo lo sviluppo (4.49)

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\dot{A}^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle &= \frac{i}{2} \int \frac{g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu}{(2\pi)^3} [e^{-ip \cdot (x-y)} + e^{ip \cdot (x-y)}] d\mathbf{p} \\ &= \frac{i}{2} (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) [\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y})] = i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dopo aver calcolato questi valori medi, possiamo a determinare la rappresentazione integrale del propagatore applicando ad esso l'operatore di D'Alembert.

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \dot{A}^\mu(x) A^j(y) | 0 \rangle \\ &\quad - \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | A^\nu(y) A^\mu(x) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) \dot{A}^\mu(x) | 0 \rangle \\ &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [A^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \dot{A}^\mu(x) A^j(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) \dot{A}^\mu(x) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.56)$$

ovvero

$$\partial_{x_0} \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \dot{A}^\mu(x) A^j(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) \dot{A}^\mu(x) | 0 \rangle. \quad (4.57)$$

Con analogo procedimento si ottiene la derivata seconda rispetto a x_0

$$\begin{aligned} \partial_{x_0}^2 \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\dot{A}^\mu(x), A^\nu(y)] | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \ddot{A}^\mu(x) A^j(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) \ddot{A}^\mu(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.58)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \partial_{x_0}^2 \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle &= i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) \delta(x - y) + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \ddot{A}^\mu(x) A^j(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) \ddot{A}^\mu(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Per applicare quindi l'operatore di D'Alembert al propagatore, occorre calcolare infine il suo laplaciano sempre rispetto alla variabile x che risulta

$$\nabla_x^2 \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\nabla_x^2 A^\mu(x)] A^\nu(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) [\nabla_x^2 A^\mu(x)] | 0 \rangle$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \square_x \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle &= (\partial_{x_0}^2 - \nabla_x^2) \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) \delta(x - y) \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\square_x A^\mu(x)] A^\nu(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A^\nu(y) [\square_x A^\mu(x)] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Poichè per le equazioni del moto, l'operatore di D'Alembert applicato al campo $A^\mu(x)$ dà risultato nullo otteniamo

$$\square_x \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) \delta(x - y). \quad (4.60)$$

Poichè dunque abbiamo ottenuto che il propagatore è soluzione dell'equazione $\square_x G(x - y) = i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) \delta(x - y)$, ricaviamo la rappresentazione integrale del propagatore risolvendo tale equazione con il metodo della trasformata di Fourier. Se poniamo

$$G(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{G}(p) e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p, \quad \delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p \quad (4.61)$$

e li sostituiamo nella equazione, ricaviamo

$$-\frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{G}(p) p^2 e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p = \frac{i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu)}{(2\pi)^4} \int e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p, \quad (4.62)$$

da cui, per l'invertibilità della trasformata di Fourier, si ottiene

$$\tilde{G}(p) = -\frac{i (g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu - \eta^\mu \eta^\nu)}{p^2} \quad (4.63)$$

e dunque in conclusione

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{i (\eta^\mu \eta^\nu - g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)}{p^2} e^{-ip \cdot (x-y)} d^4p \quad (4.64)$$

ALTRO MODO

Con gli stessi calcoli di prima otteniamo

$$\begin{cases} \langle 0 | A^i(x) A^j(y) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} \left[\sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r) \right] e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \langle 0 | A^j(y) A^i(x) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|} \left[\sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r) \right] e^{ip \cdot (x-y)}. \end{cases} \quad (4.65)$$

Poichè il campo $\mathbf{A}$ soddisfa come equazione del moto l'equazione di Klein-Gordon a massa nulla, il propagatore del fotone può essere ottenuto eseguendo gli stessi calcoli

$$\langle 0 | T(A^i(x), A^j(y)) | 0 \rangle = iD_F^{ij}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon} \sum_{r=1}^2 \varepsilon^i(\mathbf{p}, r) \varepsilon^j(\mathbf{p}, r). \quad (4.66)$$

Ora rimane da valutare la somma sulle polarizzazioni. Osservando che le relazioni con indici solo spaziali non sono compatibili con una teoria covariante, "immergiamo" ogni vettore tridimensionale in un quadrivettore la cui componente temporale sia zero e calcoliamo la somma con il formalismo quadridimensionale

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon(\mathbf{p}, 1) \end{pmatrix} & \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon(\mathbf{p}, 2) \end{pmatrix} \\ p^\mu &= \begin{pmatrix} p^0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} & \eta^\mu &= \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Questi quattro vettori sono chiaramente linearmente indipendenti; inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} p^\mu \varepsilon_\mu &= \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \\ \eta_\mu \varepsilon^\mu &= 0 \\ p^\mu \eta_\mu &= k^0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

la prima relazione vale poichè nel formalismo tridimensionale i vettori di polarizzazione sono ortogonali all'impulso. La tetraide però non è ortogonale. Se però ridefiniamo il vettore p secondo

$$\hat{p}^\mu = p^\mu - (p \cdot \eta) \eta^\mu \quad (4.69)$$

otteniamo correttamente

$$(p^\mu - (p \cdot \eta)\eta^\mu) \eta_\mu = 0. \quad (4.70)$$

Rimane quindi da normalizzare solo $\hat{p}^\mu$ (in quanto $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r)$ è normalizzato a -1)

$$(p^\mu - (p \cdot \eta)\eta^\mu)^2 = p^2 + (p \cdot \eta)^2 - 2(p \cdot \eta)^2 = p^2 - (p \cdot \eta)^2 = -\mathbf{p}^2 \quad (4.71)$$

otteniamo quindi una norma negativa. Normalizzandolo ad -1 abbiamo

$$\hat{p}^\mu = \frac{p^\mu - (p \cdot \eta)\eta^\mu}{\sqrt{(p \cdot \eta)^2 + p^2}}. \quad (4.72)$$

Possiamo scrivere una relazione di completezza

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, r) + \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu - \eta^\mu \eta^\nu = -g^{\mu\nu}; \quad (4.73)$$

per convincerci che questa è la corretta relazione, la applichiamo ad ognuno dei vettori della tetrad e verifichiamo che si ottiene una identità. Cominciamo con $\varepsilon_\nu(\mathbf{p}, r')$

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, r) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, r') = -\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r) \delta_{rr'} = -\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r') = -g^{\mu\nu} \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, r') = -\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r');$$

allo stesso modo si vede immediatamente per η_ν e p_ν . Possiamo ora di espandere il prodotto tra i due $\hat{p}$ ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{p}, r) &= -g^{\mu\nu} + \eta^\mu \eta^\nu - \frac{(p^\mu - (p \cdot \eta)\eta^\mu)(p^\nu - (p \cdot \eta)\eta^\nu)}{(p \cdot \eta)^2 + p^2} \\ &= -g^{\mu\nu} + \eta^\mu \eta^\nu - \frac{p^\mu p^\nu}{(p \cdot \eta)^2 + p^2} + \frac{(p \cdot \eta)[p^\mu \eta^\nu + p^\nu \eta^\mu]}{(p \cdot \eta)^2 + p^2} - \frac{(p \cdot \eta)^2 \eta^\mu \eta^\nu}{(p \cdot \eta)^2 + p^2}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Il termine in $\eta^\mu \eta^\nu$ si può scrivere

$$\eta^\mu \eta^\nu \left(1 - \frac{(p \cdot \eta)^2}{(p \cdot \eta)^2 + p^2}\right) = \eta^\mu \eta^\nu \frac{p^2}{(p \cdot \eta)^2 + p^2} = -\eta^\mu \eta^\nu \frac{p^2}{\mathbf{p}^2}; \quad (4.75)$$

inserendolo all'interno del propagatore otteniamo

$$iD_{Coul}^{\mu\nu}(x-y) = -\eta^\mu \eta^\nu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-iq(x-y)}}{\mathbf{p}^2} = -\eta^\mu \eta^\nu \delta(x^0 - y^0) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{i e^{-iq(x-y)}}{\mathbf{p}^2}. \quad (4.76)$$

Riconosciamo la funzione di Green del Laplaciano, e quindi abbiamo

$$iD_{Coul}^{\mu\nu}(x-y) = -i \eta^\mu \eta^\nu \delta(x^0 - y^0) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (4.77)$$

Ricapitolando il propagatore assume la seguente forma

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon} \left[-g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{(p \cdot \eta)^2 + p^2} + \frac{(p \cdot \eta)[p^\mu \eta^\nu + p^\nu \eta^\mu]}{(p \cdot \eta)^2 + p^2} \right] + iD_{Coul}^{\mu\nu}(x-y).$$

Ricordando l'espressione dell'Hamiltoniana di interazione (la cui particolarità è quella di avere al suo interno due termini, uno di ordine 1 in e e uno di ordine 2 in e)

$$H_I = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{J^0(\mathbf{y}, x^0) J^0(\mathbf{x}, x^0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + e \int d\mathbf{x} A_i \bar{\psi} \gamma^i \psi, \quad (4.78)$$

otteniamo, per la formula di Dyson fino al secondo ordine in e

$$S-I = \underbrace{-i \int d^4x J_i A^i}_{\text{Primo Ordine}} - i \underbrace{\int d^4x d\mathbf{y} \frac{J^0(\mathbf{y}, x^0) J^0(\mathbf{x}, x^0)}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T(J_i(x) A^i(x) J_k(y) A^k(y))}_{\text{Secondo Ordine}},$$

dove $J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. Valutando il T-prodotto con il teorema di Wick, può interessare particolarmente il pezzo di matrice S nel quale interviene il propagatore del fotone, ovvero nella contrazione di due operatori fotonici: $N(J_\mu(x) \overbrace{A^\mu(x) J_\nu(y) A^\nu(y))} = i D_F^{\mu\nu}(x-y) N(J_\mu(x) J_\nu(y))$. Inseriamo nel propagatore fotonico solo il termine $i D_{Coul}^{\mu\nu}(x-y)$ ottenendo

$$\frac{(-i)^3}{2!} \int d^4x d^4y \eta^\mu \eta^\nu \delta(x^0 - y^0) \frac{J_\mu(x) J_\nu(y)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = i \int d^4x d\mathbf{y} \frac{J^0(\mathbf{y}, x^0) J^0(\mathbf{x}, x^0)}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (4.79)$$

che si cancella esattamente con il primo termine al secondo ordine nella matrice S . Questa cancellazione non è miracolosa: questo perchè la matrice S è un oggetto Lorentz covariante. Ottengo però dei termini che non sono Lorentz covarianti nei passaggi intermedi perchè la scelta di Gauge che abbiamo fatto, cioè quella di Coulomb non è esplicitamente covariante. La matrice S quindi sarà, sia invariante di Gauge, che di Lorentz.

Per quanto riguarda invece i termini del propagatore dipendenti da $p^\mu = -i\partial_x^\mu$, vediamo ora perchè non danno contributo. Limitiamoci, per il momento, alla descrizione di fenomeni che coinvolgono il propagatore del fotone. Utilizzando il teorema di Wick avremo che il pezzo di matrice S al secondo ordine sarà

$$- \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y i D_F^{ik}(x-y) N(J_i(x) J_k(y)). \quad (4.80)$$

La prima semplificazione che possiamo fare è sostituire alla somma sugli indici spaziali, una somma sugli indici μ, ν , in quanto quando uno dei due indici è 0 il propagatore del fotone è 0

$$- \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y i D_F^{ik}(x-y) N(J_i(x) J_k(y)) = - \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y i D_F^{\mu\nu}(x-y) N(J_\mu(x) J_\nu(y)). \quad (4.81)$$

Analizziamo i termini del propagatore del fotone dipendenti da p^μ , ad esempio

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p^\mu \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \partial_x^\mu \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon}. \quad (4.82)$$

Se si inseriscono questi termini all'interno della matrice S si può sfruttare l'integrazione sulla variabile quadridimensionale x per integrare per parti; cambiando il segno, si può fare agire la derivata su $J_\mu(x)$. Ma questa J^μ è conservata perchè è la corrente di Dirac nello schema di interazione. Possiamo concludere quindi che nella matrice S fino al secondo ordine l'energia di interazione (4.39) consiste in realtà nel solo termine senza integrale doppio perchè, come abbiamo appena verificato, il termine di integrale doppio si cancella nella matrice S quando si contraggono i

campi fotonici. Da questa cancellazione e dalla simmetria di gauge discende anche che il propagatore del fotone consiste in realtà nel solo termine con il tensore metrico, ovvero

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i g^{\mu\nu} e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon}. \quad (4.83)$$

Capitolo 5

Processi Elementari in Elettrodinamica Quantistica

Avendo sviluppato tutti gli strumenti necessari passiamo ora al calcolo di sezioni d'urto per processi più semplici in cui si abbia interazione delle particelle di Dirac con campi elettromagnetici. Alcuni problemi saranno risolti lavorando in un volume finito: è indispensabile quindi sapere come si passa dagli integrali alle somme e viceversa. Riassumiamo qui di seguito ciò che è stato già affrontato nel primo capitolo. In un volume V i possibili impulsi sono, utilizzando delle condizioni periodiche al contorno

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad (5.1)$$

dove $\mathbf{n}$ è una qualsiasi terna di numeri. Spesso servirà calcolarci la somma

$$\sum_{\{\mathbf{n}\}} f(\mathbf{p}) \quad (5.2)$$

dove $f(\mathbf{p})$ è una qualsiasi funzione. In 3 dimensioni, la densità degli stati, ovvero il numero di valori di $\mathbf{p}$ che cadono all'interno di un volumetto Δp sarà

$$\Delta n = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z. \quad (5.3)$$

Otteniamo quindi

$$\sum_{\{\mathbf{n}\}} f(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_i f(\mathbf{p}_i) \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z, \quad (5.4)$$

ovvero

$$\frac{1}{V} \sum_{\{\mathbf{n}\}} f(\mathbf{p}) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \quad (5.5)$$

5.1 Scattering di e^- su un Nucleo Atomico

Il primo esempio che consideriamo è la diffusione di un elettrone in un potenziale classico Coulombiano. Il potenziale Coulombiano non dipenderà dal tempo in quanto il nucleo atomico sarà considerato fisso nello spazio, a causa della sua grande massa. Il campo può quindi essere considerato *esterno*, ovvero possiamo trascurare l'azione dell'elettrone sul di esso. Quello che faremo è quindi

quantizzare il campo di Dirac, ma il campo elettromagnetico è considerato classico: naturalmente questa è una approssimazione (esattamente come abbiamo fatto nel limite non relativistico di Dirac) perchè gli elettroni spostandosi emetteranno fotoni, ovvero generano un campo elettromagnetico grazie alla corrente di Dirac. Useremo quindi la lagrangiana semplificata

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi - e\bar{\psi} \not{A} \psi. \quad (5.6)$$

dove ora A^μ non è determinato dalle ψ ma dalla corrente di un nucleo. Infatti

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J_D^\mu + J_N^\mu \simeq J_N^\mu \quad (5.7)$$

in quanto $J_D^\mu \ll J_N^\mu$, ovvero la corrente elettromagnetica di Dirac è molto più piccola della corrente elettromagnetica “classica” del nucleo $J_N^\mu = (\rho(x), \mathbf{j} = 0)$. La soluzione delle equazioni del moto (5.6) dà come risultato un quadripotenziale $A^\mu \simeq A_{Coulomb}^\mu$. Se collochiamo il nucleo nell’origine e indichiamo con $|\mathbf{x}|$ la distanza tra nucleo ed elettrone, il campo A^μ assume la forma

$$A^\mu(x) = \left(-\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \mathbf{0} \right) \quad \text{con } e > 0. \quad (5.8)$$

Ci aspettiamo che

- Si conservi l’energia, in quanto il campo esterno non dipende dal tempo e quindi non può pompare energia nel sistema;
- Non sia conservato l’impulso, in quanto abbiamo un campo esterno. L’impulso verrebbe conservato se inserissimo la sorgente del campo, il nucleo.

Calcoliamoci l’Hamiltoniana di Interazione. Il calcolo è molto più semplice rispetto a quello fatto nel precedente capitolo in quanto non è presente il termine $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

$$H = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} \dot{\psi}_a - \mathcal{L} \right) = \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D^{(0)}}{\partial \dot{\psi}_a} \dot{\psi}_a - \mathcal{L} \right) = H_D^{(0)} - \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_I \quad (5.9)$$

e quindi

$$H_I = - \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_I \implies \mathcal{H}_I = e\bar{\psi} \not{A} \psi. \quad (5.10)$$

Abbiamo ottenuto la proprietà per cui per ogni lagrangiana il cui termine di interazione non dipenda dalle derivate dei campi, la corrispondente hamiltoniana di interazione coincide sempre con l’opposto in segno della lagrangiana di interazione. Abbiamo ora lo stato iniziale $|i\rangle = b_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ avente un elettrone iniziale e vogliamo che lo stato $S|i\rangle$, ottenuto quando l’interazione agisce sullo stato iniziale, collassi nello stato finale $|f\rangle = b_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle$ che rappresenta l’elettrone diffuso finale. Vogliamo calcolare ora $\langle f|S|i\rangle$ con la serie di potenze di e

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n e^n T \left(:\bar{\psi} \not{A} \psi(x_1): \dots :\bar{\psi} \not{A} \psi(x_n): \right). \quad (5.11)$$

dove si è preso il prodotto ordinato di operatori per evitare le quantità infinite. Se consideriamo dunque la matrice S sviluppata al primo ordine il suo elemento di matrice tra gli stati finale e iniziale è

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle 0|b_{r'}(\mathbf{p}') (S - I) b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = -ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \langle 0|b_{r'}(\mathbf{p}') : \bar{\psi}(x) \not{A} \psi(x) : b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \\ &= -ie \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x A_\mu(x) \langle 0|b_{r'}(\mathbf{p}') : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : b_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle. \end{aligned}$$

Se utilizziamo le espansioni dei campi fermionici a volume finito

$$\begin{cases} \psi(x) = \sum_{n=1}^2 \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{q}}}} \left(b_n(\mathbf{q}) u(\mathbf{q}, n) e^{-iqx} + d_n^\dagger(\mathbf{p}) v(\mathbf{q}, n) e^{iqx} \right) \\ \bar{\psi}(x) = \sum_{s=1}^2 \sum_{\mathbf{q}'} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{q}'}}} \left(b_s^\dagger(\mathbf{q}') \bar{u}(\mathbf{q}', s) e^{iq'x} + d_s(\mathbf{q}') \bar{v}(\mathbf{q}', s) e^{-iq'x} \right), \end{cases} \quad (5.12)$$

abbiamo 4 contributi (trascurando gli esponenziali e gli spinori); utilizzando le regole di anticommutazione si ottiene

$$\begin{aligned} & \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') b_s^\dagger(\mathbf{q}') b_n(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \\ & \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') b_s^\dagger(\mathbf{q}') d_n^\dagger(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | d_n^\dagger(\mathbf{q}) b_{r'}(\mathbf{p}') b_s^\dagger(\mathbf{q}') b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = 0 \\ & \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') d_s(\mathbf{q}') b_n(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') b_n(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) d_s(\mathbf{q}') | 0 \rangle = 0 \\ & \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') : d_s(\mathbf{q}') d_n^\dagger(\mathbf{q}) : b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = - \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') d_n^\dagger(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) d_s(\mathbf{q}') | 0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

dove nell'ultimo termine il meno viene fuori dal prodotto normale operatori di creazione e distruzione (per fermioni si deve ricordare che il prodotto normale introduce un cambio di segno). Quindi solo il primo termine risulta diverso da zero ed in particolare si ha

$$\begin{aligned} & \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') b_s^\dagger(\mathbf{q}') b_n(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \\ & \langle 0 | \{ b_{r'}(\mathbf{p}'), b_s^\dagger(\mathbf{q}') \} \{ b_n(\mathbf{q}), b_r^\dagger(\mathbf{p}) \} | 0 \rangle = \delta_{r's} \delta_{nr} \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

e quindi, ricordando che la componente temporale del quadriimpulso è collegato alle rispettive componenti spaziali $p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, otteniamo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{ie}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x A_\mu(x) \sum_{s,n=1}^2 \sum_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}'}}} \langle 0 | b_{r'}(\mathbf{p}') b_s^\dagger(\mathbf{q}') b_n(\mathbf{q}) b_r^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \bar{u}(\mathbf{q}', s) \gamma^\mu u(\mathbf{q}, n) e^{i(q'-q)x} \\ &= -\frac{ie}{V} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}'}}} \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, r) \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 e^{i(p'^0 - p^0)x} \int d\mathbf{x} A_\mu(x) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= -\frac{ie}{V} \frac{2\pi m}{E_{\mathbf{p}}} \delta(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'}) \left(\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right) \underbrace{\left(\int d\mathbf{x} A_0(x) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \right)}_{\text{Trasformata di Fourier del Potenziale Coulombiano } A_0(x)}. \end{aligned}$$

La presenza della δ nelle energie implica che la teoria permette soltanto processi in cui l'energia si conserva; in effetti, come dicevamo in precedenza, abbiamo un potenziale che non dipende dal tempo il che implica la conservazione dell'energia. Non abbiamo ottenuto la δ negli impulsi in quanto è presente un potenziale esterno. Quando il campo elettromagnetico sarà anch'esso variabile vedremo che la teoria implica la completa conservazione del quadriimpulso. Denominiamo ora l'impulso trasferito $\mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{q}$ e denominiamo la trasformata di Fourier del potenziale coulombiano come

$$\tilde{A}_0(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{x} A_0(x) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.15)$$

Facciamo ora il modulo quadro dell'elemento di matrice calcolato

$$|S_{fi}|^2 = \frac{e^2}{V^2} \frac{m^2}{E^2} \left(2\pi \delta(E - E') \right)^2 \left| \tilde{A}_0(\mathbf{q}) \right|^2 \left| \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right|^2, \quad (5.16)$$

avendo denominato per semplicità $E = E_{\mathbf{p}}$ e $E' = E_{\mathbf{p}'}$. Per determinare $(\delta(E - E'))^2$, ricorriamo all'approssimazione di tempo finito di durata dell'esperimento. Sebbene la conservazione dell'energia, per il principio di indeterminazione, venga meno se il tempo non è rigorosamente infinito, tuttavia se il tempo T di durata dell'esperimento è molto "lungo", esso può essere assimilato ad infinito in modo che si abbia da una parte la conservazione dell'energia e d'altra parte la possibilità di approssimare

$$\delta(0) = \delta(E - E')|_{E=E'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E-E')x^0} dx^0 \Big|_{E=E'} \simeq \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 = \frac{T}{2\pi}, \quad (5.17)$$

dove tale approssimazione è tanto più vera quanto più "lungo" sia il tempo di durata finita T dell'esperimento. Applicando l'identità $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$ della teoria delle distribuzioni al caso $f(x) = \delta(x)$, si ottiene

$$[\delta(x)]^2 = \delta(x)\delta(x) = \delta(x)\delta(0) \quad (5.18)$$

da cui segue

$$[\delta(E - E')]^2 = \delta(E - E')\delta(0) = \frac{T}{2\pi} \delta(E - E'). \quad (5.19)$$

Ora i nostri rivelatori saranno sensibili ad un certo range di impulsi dato dalla (5.3). La probabilità per unità di tempo va quindi moltiplicata per il numero di impulsi finali Δn presenti in un intervallo

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi e^2}{V^2} \frac{m^2}{E^2} |\tilde{A}_0(\mathbf{q})|^2 |\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r)|^2 \delta(E - E') d^3\mathbf{p}'. \quad (5.20)$$

La sezione d'urto è definita come la probabilità per unità di tempo (che è proprio $\frac{|S_{fi}|^2}{T}$) per unità di flusso incidente, ossia per il numero di particelle passanti, nell'unità di tempo, attraverso una sezione ortogonale al fascio incidente. Ora il flusso è definito come la densità di particelle per la velocità

$$\Phi = \rho v \quad (5.21)$$

e, poichè ci siamo messi in un volume finito

$$\rho = \frac{1}{V} \implies \Phi = \frac{v}{V} = \frac{1}{V} \frac{p'}{E'} = \frac{1}{V} \frac{p'}{E} \quad (5.22)$$

in quanto vi è solo un elettrone incidente per volta. p' è il modulo dell'impulso della particella incidente. Notare che la conservazione dell'energia $E = E'$ implica anche l'uguaglianza tra i moduli degli impulsi $p = p'$ iniziale e finale. Pertanto la sezione d'urto differenziale per il processo sarà

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} \frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 p'} \frac{m^2}{E} |\tilde{A}_0(\mathbf{q})|^2 |\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r)|^2 \delta(E - E') d^3\mathbf{p}'. \quad (5.23)$$

Il volume V è sparito e quindi possiamo fare tranquillamente il limite di volume infinito. La quantità calcolata rappresenta la probabilità di avere l'elettrone in uno stato finale con impulso contenuto in un volumetto $d^3\mathbf{p}'$ attorno a $\mathbf{p}'$. Ora riscriviamoci questa espressione utilizzando le coordinate sferiche per il differenziale $d^3\mathbf{p}'$

$$d^3\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega_{\mathbf{p}'} = p' E' dE' d\Omega_{\mathbf{p}'} \quad (5.24)$$

in quanto

$$E \, dE = \sqrt{m^2 + p^2} \frac{p \, dp}{\sqrt{m^2 + p^2}} = p \, dp. \quad (5.25)$$

Per eliminare la delta residua, integriamo rispetto a dE' e otteniamo

$$d\sigma = \frac{m^2 e^2}{(2\pi)^2} \left| \tilde{A}_0(\mathbf{q}) \right|^2 \left| \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right|^2 d\Omega_{\mathbf{p}'} \quad (5.26)$$

5.1.1 Calcolo Trasformata di Fourier del Potenziale Coulombiano

Per definizione avevamo che

$$\tilde{A}_0(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{x} A_0(x) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = - \int d\mathbf{x} \frac{Ze}{4\pi x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}. \quad (5.27)$$

Ora sappiamo che (guarda Appendice)

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi x} \right) = -\delta(x) \quad (5.28)$$

dove ovviamente il laplaciano va inteso in senso distribuzionale; inoltre se antitrasformiamo la (5.27) otteniamo

$$A_0(x) = -\frac{Ze}{4\pi x} = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{A}_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}. \quad (5.29)$$

Applichiamo il laplaciano a quest'ultima relazione si ottiene

$$-\nabla^2 \left(\frac{Ze}{4\pi x} \right) = Ze \delta(x) = Ze \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = - \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} q^2 \tilde{A}_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \quad (5.30)$$

per cui

$$\tilde{A}_0(\mathbf{q}) = -\frac{Ze}{q^2} = -\frac{Ze}{4p^2 \sin^2 \theta/2}. \quad (5.31)$$

in quanto

$$q^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 2p^2 - 2p^2 \cos \theta = 4p^2 \sin^2 \theta/2 \quad (5.32)$$

dove θ è l'angolo di scattering. Sostituendo, otteniamo per la sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{m^2 Z^2 e^4}{64\pi^2 p^4 \sin^4 \theta/2} \left| \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right|^2 \quad (5.33)$$

5.1.2 Polarizzazioni

A questo punto introduciamo delle considerazioni sulle polarizzazioni. Concentriamoci quindi sul termine che comprende gli spinori; per poterlo calcolare dovrei conoscere le polarizzazioni esatte r e r' delle particelle all'inizio e alla fine dell'esperimento. Se il fascio incidente è non polarizzato, segue che ripetendo l'esperimento più volte (in generale un numero grande di volte in modo che valga la legge dei grandi numeri) si avranno nella metà delle volte elettroni con una polarizzazione e nell'altra metà delle volte elettroni con l'altra polarizzazione. Pertanto, sulle polarizzazioni iniziali r non specificate eseguiamo una media dividendo per due la somma sull'indice r di tali polarizzazioni. Se poi non siamo interessati ad una determinata polarizzazione finale, eseguiamo

la somma sulle polarizzazioni finali non osservate in base al teorema sulla probabilità totale (sono eventi *incompatibili*). Dobbiamo calcolare dunque la *sezione d'urto non polarizzata*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{m^2 Z^2 e^4}{64\pi^2 p^4 \sin^4 \theta/2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r,r'=1}^2 \left| \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right|^2 \right]. \quad (5.34)$$

Cerchiamo di svolgere le somme in parentesi quadre

$$\begin{aligned} \sum_{r,r'} \left(\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right) \left(\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right)^\dagger &= \sum_{r,r'} \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) u^\dagger(\mathbf{p}, r) \gamma^0 \gamma^0 u(\mathbf{p}', r') \\ &= \sum_{r,r'} \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 \underbrace{u(\mathbf{p}, r) \bar{u}(\mathbf{p}, r)}_{\text{Proiettore su } E>0} \gamma^0 u(\mathbf{p}', r') = \sum_{r'} \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 u(\mathbf{p}', r'); \end{aligned} \quad (5.35)$$

esplicitando ora le componenti di Dirac abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{r'} \sum_{\alpha, \beta} \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}', r') \left(\gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} u_\beta(\mathbf{p}', r') &= \sum_{r'} \sum_{\alpha, \beta} \overbrace{u_\beta(\mathbf{p}', r') \bar{u}_\alpha(\mathbf{p}', r')}^{\text{Proiettore su } E>0} \left(\gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\beta\alpha} \left(\gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} = \text{Tr} \left(\frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Introduciamo ora qualche risultato sulle tracce delle matrici γ utili per proseguire nel calcolo della sezione d'urto. Sappiamo che $\forall \mu$ vale $\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0$ e anche $\text{Tr}(\gamma^5) = 0$. Inoltre, per un numero dispari di matrici γ vale

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \quad (5.37)$$

con n numero dispari; infatti, poichè sappiamo che $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$, possiamo scrivere, grazie all'invarianza ciclica della traccia

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) = (-1)^n \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = -\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) \quad (5.38)$$

da cui segue la tesi. Abbiamo sfruttato il fatto che $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ e che dobbiamo scambiare la matrice γ^5 con le γ^μ un numero dispari di volte. Calcoliamo ora, sfruttando sempre l'invarianza ciclica della traccia, la quantità

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu} \text{Tr} \mathbb{I} = 4g^{\mu\nu} \quad (5.39)$$

da cui segue che

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b}) = 4a \cdot b \quad (5.40)$$

dove il prodotto scalare dei due quadrivettori a e b è quello quadridimensionale. La traccia di 4 quattro quantità slash è più complicata, esponiamo qui il risultato senza dimostrazione

$$\text{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4) = 4(a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 a_2 \cdot a_3). \quad (5.41)$$

Nel caso della sezione d'urto che stiamo calcolando abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0) &= \text{Tr}(\not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0) + m^2 \text{Tr}((\gamma^0)^2) = \text{Tr}(\not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0) + 4m^2 \\ &= 4(p'^0 p^0 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + p'^0 p^0) + 4m^2 = 4(2E^2 - E^2 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}) + 4m^2 \\ &= 4(E^2 + p^2 \cos \theta + m^2) = 4(2E^2 + p^2 \cos \theta - p^2) = 8E^2 \left(1 - \frac{p^2}{2E^2} (1 - \cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

dove i termini aggiuntivi sono nulli in quanto contenenti tracce di 3 matrici γ . E quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r,r'=1}^2 \left| \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \right|^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\not{p}' + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p} + m}{2m} \gamma^0 \right) = \frac{E^2}{m^2} \left(1 - \frac{p^2}{E^2} \sin^2 \theta/2 \right) \\ &= \frac{E^2}{m^2} (1 - v^2 \sin^2 \theta/2) . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Utilizzando questi risultati otteniamo la cosiddetta sezione d'urto di *Rutherford* o *Mott*

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}} = \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 E^2 v^4 \sin^4 \theta/2} (1 - v^2 \sin^2 \theta/2)} \quad (5.44)$$

che descrive correttamente la diffusione di un elettrone nel campo coulombiano di un nucleo all'ordine più basso nella costante di accoppiamento. Tale formula perde ovviamente validità per nuclei pesanti in quanto la costante Ze diventa troppo grande per essere un buon parametro perturbativo. La formula può essere anche riscritta con l'utilizzo della costante di struttura fine $\alpha = e^2/4\pi$. Per velocità basse otteniamo l'esatta espressione della sezione d'urto che si può ricavare ordinariamente in meccanica classica. Per avere la sezione d'urto totale σ , ovvero la probabilità di ottenere un elettrone scatterato indipendentemente dall'impulso con cui l'osservo, è necessario effettuare l'integrazione su tutti gli ancoli solidi $\Omega_{\mathbf{p}'} = \sin \theta d\theta d\varphi$. La sezione d'urto totale, moltiplicata per il numero di centri scatteratori e per il flusso Φ integrato nel tempo (cioè il numero totale di particelle incidenti per unità di superficie), deve fornire il numero totale di eventi rivelati. Notiamo però che, effettuando l'integrazione, l'integrale in $d\theta$ è divergente per via della presenza del fattore $\sin^4 \theta/2$ a denominatore. Tale infinito discende dalla singolarità in zero del potenziale coulombiano $A^0(x)$ che inoltre tende a zero "lentamente" per x tendente all'infinito. Se A^0 tende a zero "lentamente" all'infinito, possiamo immaginare che la carica sia "abbastanza" estesa (diffusa) in tutto lo spazio e dunque la sezione d'urto infinita è in accordo con la considerazione che anche le particelle che passano "lontano" dal nucleo subiscono diffusione (la sezione d'urto infatti può considerarsi una sorta di *area efficace* che il bersaglio oppone al flusso di particelle). Ovviamente, in un esperimento reale, la particella sparata non risente fino all'infinito dell'influsso del nucleo; in effetti, dopo che il proiettile si è allontanato a sufficienza, tutte le altre cariche del laboratorio tendono a schermare il nucleo, il cui effetto è quindi asintoticamente trascurabile.

5.2 Scattering $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Molto simile all'elettrone, il muone è una particella fondamentale che possiede stessa carica elettrica e stesso spin dell'elettrone, distinguendosi dall'elettrone soltanto per il valore della massa a riposo che è circa 207 volte la massa a riposo dell'elettrone. Indichiamo con μ^+ e μ^- rispettivamente il muone positivo e il muone negativo i quali, analogamente a quanto visto per l'elettrone e il positrone, sono uno l'antiparticella dell'altro. Per studiare il processo

$$\begin{array}{ccc} e^+ e^- & \rightarrow & \mu^+ \mu^- \\ q \ p & & q' \ p' \end{array} \quad (5.45)$$

occorre introdurre il campo di materia del muone che, essendo un fermione del tutto simile all'elettrone, viene descritto dall'equazione di Dirac. Abbiamo a che fare quindi con due campi di

Dirac indipendenti, differenziati tra di loro per il valore della massa. Per evitare confusioni nella notazione, indicheremo il campo dell'elettrone con l'indice e , mentre quello del muone con indice m ; inoltre indichiamo la massa dell'elettrone con m e la massa del muone con M . La lagrangiana totale del processo di interazione è pertanto

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_e(i\not{\partial} - m)\psi_e + \bar{\psi}_m(i\not{\partial} - m)\psi_m - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \underbrace{e(\bar{\psi}_m\gamma^\nu\psi_m + \bar{\psi}_e\gamma^\nu\psi_e)A_\nu}_{\mathcal{L}_I} \quad (5.46)$$

È immediato rendersi conto che la lagrangiana appena scritta risulta invariante per le trasformazioni

$$A(x) \rightarrow A(x), \quad \psi_e(x) = e^{i\alpha}\psi_e(x), \quad \psi_m(x) = e^{i\beta}\psi_m(x), \quad (5.47)$$

con le complesse coniugate associate per $\bar{\psi}_e(x)$ e $\bar{\psi}_m(x)$, da cui segue che vi saranno due cariche costanti nel tempo, denominate *numero leptonico* N_e e *numero muonico* N_μ

$$\begin{cases} N_e = n_{e^-} - n_{e^+} \\ N_m = n_{m^-} - n_{m^+} \end{cases} \quad (5.48)$$

Poichè possiamo eseguire una trasformazione di fase anche solo sul campo elettronico o solo su quello muonico, segue che la conservazione dei numeri leptonici elettronico e muonico deve valere anche in modo separato. Considerando solo il propagatore del fotone che dipende solo dal tensore metrico, abbiamo che la densità di energia di interazione è

$$\mathcal{H}_I(x) = e(\bar{\psi}_e A \psi_e + \bar{\psi}_m A \psi_m) \quad (5.49)$$

Il secondo ordine della matrice S risulta essere

$$-\frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y T \left\{ \left[J_\rho^{(e)}(x) + J_\rho^{(m)}(x) \right] A^\rho(x) \left[J_\sigma^{(e)}(y) + J_\sigma^{(m)}(y) \right] A^\sigma(y) \right\} \quad (5.50)$$

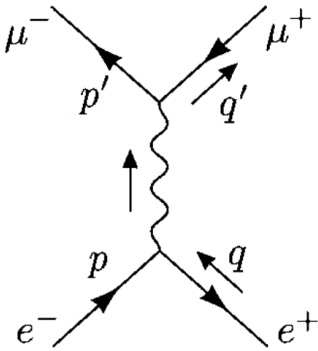


Figura 5.1

Abbiamo ora come stati iniziali e finali

$$\begin{cases} |i\rangle = b_e^\dagger(\mathbf{p}, r) d_e^\dagger(\mathbf{q}, s) |0\rangle \\ |f\rangle = b_m^\dagger(\mathbf{p}', r') d_m^\dagger(\mathbf{q}', s') |0\rangle \end{cases} \quad (5.51)$$

dove il vuoto $|0\rangle$ deve essere considerato come il prodotto tensoriale dei due stati di vuoto elettronico e muonico distinti, ovvero $|0\rangle = |0\rangle_e |0\rangle_m$. Poichè negli stati iniziale e finale vi sono solo fermioni (non vi è nessun fotone), segue che nella matrice S dobbiamo considerare solo la contrazione dei campi fotonici (il valor medio sullo stato di vuoto dei campi fotonici seleziona solo operatori che creano ma poi annichilano il fotone). Oltretutto la contrazione di campi tra loro diversi (come possono essere in questo caso le contrazioni tra elettroni e fotoni, fotoni e muoni e muoni ed elettroni) dà sempre come risultato 0. Contraendo i campi fotonici, quindi, descriverò processi in cui non ci sono fotoni negli stati

iniziale e finale, ma solo fermioni. Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} S - I &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y iD_F^{\rho\sigma}(x-y) : (\bar{\psi}_e\gamma_\rho\psi_e + \bar{\psi}_m\gamma_\rho\psi_m)_x (\bar{\psi}_e\gamma_\sigma\psi_e + \bar{\psi}_m\gamma_\sigma\psi_m)_y : \\ &= -\frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y iD_F^{\rho\sigma}(x-y) \left[: (\bar{\psi}_e\gamma_\rho\psi_e)_x (\bar{\psi}_m\gamma_\sigma\psi_m)_y : + : (\bar{\psi}_m\gamma_\sigma\psi_m)_x (\bar{\psi}_e\gamma_\rho\psi_e)_y : \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

dove i termini con soli elettroni $(\bar{\psi}_e \gamma_\rho \psi_e)_x (\bar{\psi}_e \gamma_\sigma \psi_e)_y$ e con soli muoni $(\bar{\psi}_m \gamma_\rho \psi_m)_x (\bar{\psi}_m \gamma_\sigma \psi_m)_y$ sono eliminati perchè si annullano quando si calcola il corrispondente elemento di matrice tra stati iniziale e finale. Infatti, se utilizziamo le espansioni dei campi di Dirac in onde piane e le regole di anticommutazione, il primo termine fornisce (trascurando l'eventuale segno in questo caso irrilevante e considerando per il momento solo gli operatori di creazione e distruzione)

$$\begin{aligned} & \langle f | (\bar{\psi}_e \gamma_\rho \psi_e)_x (\bar{\psi}_e \gamma_\sigma \psi_e)_y | i \rangle \\ & \approx \langle 0 | b_m(\mathbf{p}', r') d_m(\mathbf{q}', s') \left[(b_e^\dagger + d_e)_x (b_e + d_e^\dagger)_x (b_e^\dagger + d_e)_y (b_e + d_e^\dagger)_y \right] b_e^\dagger(\mathbf{p}, r) d_e^\dagger(\mathbf{q}, s) | 0 \rangle \\ & = \langle 0 | \left[(b_e^\dagger + d_e)_x (b_e + d_e^\dagger)_x (b_e^\dagger + d_e)_y (b_e + d_e^\dagger)_y \right] b_e^\dagger(\mathbf{p}, r) d_e^\dagger(\mathbf{q}, s) b_m(\mathbf{p}', r') d_m(\mathbf{q}', s') | 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

poichè tutti gli operatori elettronici anticommutano con tutti gli operatori muonici, in quanto attinenti a gradi di libertà distinti e indipendenti. In modo del tutto analogo si dimostra che

$$\langle f | (\bar{\psi}_m \gamma_\rho \psi_m)_x (\bar{\psi}_m \gamma_\sigma \psi_m)_y | i \rangle = 0.$$

Si può ora vedere ad occhio, poichè gli operatori di creazione e distruzione dei muoni anticommutano con quelli degli elettroni, (se per caso non ci credessi, vedi Patrì pag 303), che

$$: (\bar{\psi}_e \gamma_\rho \psi_e)_x (\bar{\psi}_m \gamma_\sigma \psi_m)_y : = : (\bar{\psi}_m \gamma_\rho \psi_m)_x (\bar{\psi}_e \gamma_\sigma \psi_e)_y :, \quad (5.53)$$

e quindi abbiamo

$$S - I = -e^2 \int d^4x d^4y i D_F^{\rho\sigma}(x - y) : (\bar{\psi}_e \gamma_\rho \psi_e)_x (\bar{\psi}_m \gamma_\sigma \psi_m)_y :, \quad (5.54)$$

che, brachettato tra gli stati iniziale e finale è

$$\langle f | S | i \rangle = -e^2 \int d^4x d^4y i D_F^{\rho\sigma}(x - y) \langle f | : (\bar{\psi}_e \gamma_\rho \psi_e)_x (\bar{\psi}_m \gamma_\sigma \psi_m)_y : | i \rangle. \quad (5.55)$$

Utilizzando le espansioni per i campi sempre a volume finito

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_e(x) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{k}}}} \left(b_e(\mathbf{k}, l) u_e(\mathbf{k}, l) e^{-ikx} + d_e^\dagger(\mathbf{k}, l) v_e(\mathbf{k}, l) e^{ikx} \right) \\ \bar{\psi}_e(x) &= \sum_{l'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'} \sqrt{\frac{m}{VE_{\mathbf{k}'}}} \left(b_e^\dagger(\mathbf{k}', l') \bar{u}_e(\mathbf{k}', l') e^{ik'x} + d_e(\mathbf{k}', l') \bar{v}_e(\mathbf{k}', l') e^{-ik'x} \right) \\ \psi_m(y) &= \sum_{t=1}^2 \sum_{\mathbf{w}} \sqrt{\frac{M}{VE_{\mathbf{w}}}} \left(b_m(\mathbf{w}, t) u_m(\mathbf{w}, t) e^{-iwy} + d_m^\dagger(\mathbf{w}, t) v_m(\mathbf{w}, t) e^{iwy} \right) \\ \bar{\psi}_m(y) &= \sum_{t'=1}^2 \sum_{\mathbf{w}'} \sqrt{\frac{M}{VE_{\mathbf{w}'}}} \left(b_m^\dagger(\mathbf{w}', t') \bar{u}_m(\mathbf{w}', t') e^{iw'y} + d_m(\mathbf{w}', t') \bar{v}_m(\mathbf{w}', t') e^{-iw'y} \right), \end{aligned} \right. \quad (5.56)$$

otteniamo che solo i termini in blu danno contributo

$$\begin{aligned} & \langle 0 | b_m(\mathbf{p}', r') d_m(\mathbf{q}', s') : [(d_e)_x (b_e)_x (b_m^\dagger)_y (d_m^\dagger)_y] : b_e^\dagger(\mathbf{p}, r) d_e^\dagger(\mathbf{q}, s) | 0 \rangle \\ & = \langle 0 | b_m(\mathbf{p}', r') d_m(\mathbf{q}', s') d_e(\mathbf{k}', l') b_e(\mathbf{k}, l) b_m^\dagger(\mathbf{w}', t') d_m^\dagger(\mathbf{w}, t) b_e^\dagger(\mathbf{p}, r) d_e^\dagger(\mathbf{q}, s) | 0 \rangle \\ & = \langle 0 | \left\{ b_m(\mathbf{p}', r'), b_m^\dagger(\mathbf{w}', t') \right\} \left\{ d_m(\mathbf{q}', s'), d_m^\dagger(\mathbf{w}, t) \right\} \left\{ d_e(\mathbf{k}', l'), d_e^\dagger(\mathbf{q}, s) \right\} \left\{ b_e(\mathbf{k}, l), b_e^\dagger(\mathbf{p}, r) \right\} | 0 \rangle \\ & = \delta_{r't'} \delta_{s't} \delta_{l's} \delta_{lr} \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{w}'} \delta_{\mathbf{q}'\mathbf{w}} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{w}'} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\langle f | S | i \rangle &= -e^2 \sum_{l, l', t, t'} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{w}, \mathbf{w}'} \int d^4x d^4y \frac{mM}{V^2 \sqrt{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{w}} E_{\mathbf{w}'}}} iD_F^{\rho\sigma}(x-y) \bar{v}_e(\mathbf{k}', l') \gamma_\rho u_e(\mathbf{k}, l) e^{-i(k'+k)x} \\
&\times \delta_{r't'} \delta_{s't} \delta_{l's} \delta_{lr} \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{w}'} \delta_{\mathbf{q}'\mathbf{w}} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{w}'} \bar{u}_m(\mathbf{w}', t') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{w}, t) e^{i(w'+w)y} \\
&= -e^2 \int d^4x d^4y \frac{mM}{V^2 \sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}'} E_{\mathbf{p}'}}} iD_F^{\rho\sigma}(x-y) \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) e^{-i(q+p)x} \\
&\times \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s') e^{i(p'+q')y} \\
&= \int d^4x d^4y \frac{ie^2 mM g^{\rho\sigma}}{(2\pi)^4 V^2 \sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}'} E_{\mathbf{p}'}}} \int \frac{d^4k''}{(k'')^2 + i\varepsilon} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) e^{-i(q+p+k'')x} \\
&\times \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s') e^{i(p'+q'+k'')y} \\
&= \frac{(2\pi)^8 ie^2 mM g^{\rho\sigma}}{(2\pi)^4 V^2 \sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}'} E_{\mathbf{p}'}}} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s') \\
&\times \int \frac{d^4k''}{(k'')^2 + i\varepsilon} \delta^4(q+p+k'') \delta^4(p'+q'+k'') \\
&= \frac{(2\pi)^4 ie^2 mM g^{\rho\sigma}}{V^2 \sqrt{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}} E_{\mathbf{q}'} E_{\mathbf{p}'}}} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s') \frac{\delta^4(p+q-p'-q')}{(p+q)^2 + i\varepsilon};
\end{aligned}$$

chiamando i termini in blu con $\mathcal{M}$ abbiamo

$$S_{fi} = \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}V}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{q}}V}} \sqrt{\frac{M}{E_{\mathbf{p}'}V}} \sqrt{\frac{M}{E_{\mathbf{q}'}V}} \mathcal{M}. \quad (5.57)$$

Come si vede, abbiamo ritrovato la conservazione del quadriimpulso fra gli stati iniziale e finale, data da $p+q=p'+q'$. Affinchè valga tale conservazione, deve intervenire anche la massa di riposo dei muoni perchè parte dell'energia cinetica degli elettroni si deve trasformare appunto nell'energia di riposo $E = Mc^2$ di due muoni, se essi debbono essere creati nel processo.

Se scegliamo ora il sistema di riferimento del centro di massa degli elettroni in cui vale $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$, segue $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$ e dunque $E_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{q}} = E$ perchè l'energia dipende solo dal modulo della parte spaziale del quadrivettore. Possiamo quindi omettere di scrivere l'addendo $i\varepsilon$ al denominatore del propagatore fotonico, in quanto anche senza di esso il denominatore risulta essere diverso da zero poichè si ha $(p+q)^2 = (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})^2 - (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 = 4E^2 \neq 0$. Quando il quadriimpulso p e la massa m di una particella verificano la relazione $p^2 = m^2$, si dice che il quadriimpulso della particella si trova *sulla shell* e la particella è *reale*. Poichè dunque il fotone nel propagatore (*fotone interno*) ha quadriimpulso k'' che non verifica la legge di dispersione dei fotoni (modulo quadro nullo del proprio quadriimpulso), concludiamo che tale fotone interno non si trova *sulla shell* ed è pertanto ciò che viene denominato un *fotone virtuale*.

Per calcolare la sezione d'urto di questo processo, occorre determinare il quadrato della funzione delta $\delta^4(p+q-p'-q')$

$$|S_{fi}|^2 = \frac{m^2}{E^2 V^2} \frac{M^2}{E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{q}'} V^2} |\mathcal{M}|^2. \quad (5.58)$$

Generalizziamo ora quanto detto nello scattering Coulombiano. Sebbene la conservazione dell'impulso, per il principio di indeterminazione, venga meno se la regione spaziale non è rigorosamente

infinita, tuttavia se la regione in cui ha luogo l'esperimento ha volume V molto grande, essa può essere considerata al limite infinita in modo che si abbia da una parte la conservazione dell'impulso e dall'altra la possibilità di approssimare

$$\begin{aligned}\delta^4(0) &= \delta(p+q-p'-q')|_{p+q=p'+q'} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(p+q-p'-q')\cdot x} d^4x \Big|_{p+q=p'+q'} \\ &\simeq \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x = \frac{VT}{(2\pi)^4}.\end{aligned}\quad (5.59)$$

In questa formula abbiamo supposto (come nello scattering Coulombiano) che in tempo T di durata dell'esperimento sia finito, ma anche molto lungo in modo tale da avere la conservazione dell'energia. Applicando l'identità $\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0)$ della teoria delle distribuzioni al caso $f(x) = \delta(x)$, si ottiene

$$[\delta(x)]^2 = \delta(x)\delta(x) = \delta(x)\delta(0) \quad (5.60)$$

da cui segue

$$\left[\delta^4(p+q-p'-q')\right]^2 = \delta^4(p+q-p'-q')\delta(0) = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta^4(p+q-p'-q'). \quad (5.61)$$

La sezione d'urto è definita come la probabilità per unità di tempo $\frac{|S_{fi}|^2}{T}$ per unità di flusso incidente, ossia per il numero di particelle passanti, nell'unità di tempo, attraverso una sezione ortogonale al fascio incidente. Inoltre bisogna moltiplicare per la densità degli stati finali $\frac{Vd\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{Vd\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}$, in quanto il detector rivelerà un certo volumetto di impulsi

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{Vd\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{Vd\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\Phi T} \frac{m^2 M^2}{E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{q}'} E^2 V^4} |\mathcal{M}|^2 \frac{Vd\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{Vd\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}. \quad (5.62)$$

Ora il flusso nel caso di collisione di due fasci di particelle (elettroni e positroni) è dato da

$$\Phi = \frac{v}{V} - \frac{(-v)}{V} = \frac{2v}{V}. \quad (5.63)$$

Per quanto riguarda $|\mathcal{M}|^2$ abbiamo

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= (2\pi)^4 e^4 VT \left| g^{\rho\sigma} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s') \right|^2 \frac{\delta^4(p+q-p'-q')}{16E^4} \\ &= (2\pi)^4 e^4 VT |\mathfrak{M}|^2 \frac{\delta(2E - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{q}'}) \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{q}')}{16E^4}.\end{aligned}\quad (5.64)$$

$\mathfrak{M}$ viene denominata come *ampiezza di Feynman* del processo. Otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^4}{2v} \frac{m^2 M^2}{16E^6 E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{q}'}} |\mathfrak{M}|^2 \delta(2E - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{q}'}) \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{q}') d\mathbf{p}' d\mathbf{q}'; \quad (5.65)$$

per la presenza della delta, gli impulsi spaziali finali non sono tutte variabili indipendenti. Integriamo quindi prima in $d\mathbf{p}'$ e poi in $d|\mathbf{q}'|'$, lasciando solo la dipendenza dall'angolo solido infinitesimo $d\Omega_{\mathbf{q}'}$ visto dal rivelatore. Se integriamo in $d\mathbf{p}'$, otteniamo

$$d\sigma = \frac{e^4 m^2 M^2}{16E^6 E'^2} \frac{\delta(E - E')}{(2\pi)^2 4v} |\mathfrak{M}|^2 d\mathbf{q}' \quad (5.66)$$

perchè dalla relazione $\mathbf{p}' = -\mathbf{q}'$ segue $E_{\mathbf{p}'} = E_{\mathbf{q}'} = E'$ e per la proprietà della delta di Dirac vale inoltre

$$\delta(2E - E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{q}'}) = \delta(2E - 2E') = \frac{1}{2}\delta(E - E'). \quad (5.67)$$

Ricordando che vale

$$E' dE' = \sqrt{M^2 + (p')^2} d\left(\sqrt{M^2 + (p')^2}\right) = p' dp', \quad (5.68)$$

se integriamo in $d|\mathbf{q}'|$ abbiamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int \frac{e^4 m^2 M^2}{16E^6 E'} \frac{\delta(E - E')}{(2\pi)^2 4v} |\mathfrak{M}|^2 |\mathbf{q}'|^2 d|\mathbf{q}'| d\Omega_{\mathbf{q}'} = \int \frac{e^4 m^2 M^2}{16E^6 E'} \frac{\delta(E - E')}{(2\pi)^2 4v} |\mathfrak{M}|^2 |\mathbf{q}'| dE' d\Omega_{\mathbf{q}'} \\ &= \frac{e^4 m^2 M^2}{16E^7 (2\pi)^2 4v} |\mathfrak{M}|^2 |\mathbf{q}'| d\Omega_{\mathbf{q}'} = \frac{e^4 m^2 M^2}{64E^6 (2\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}'|}{|\mathbf{p}|} |\mathfrak{M}|^2 d\Omega_{\mathbf{q}'}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $v = \frac{|\mathbf{p}|}{E}$. Abbiamo ottenuto la sezione d'urto differenziale

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{q}'}} = \frac{e^4 m^2 M^2}{64E^6 (2\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}'|}{|\mathbf{p}|} |\mathfrak{M}|^2}. \quad (5.70)$$

Dalla relazione $E = E'$ e dal fatto che $|\mathbf{q}| = |\mathbf{p}|$ e $|\mathbf{q}'| = |\mathbf{p}'|$ si vede che vale

$$\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{M^2 + |\mathbf{p}'|^2}, \quad (5.71)$$

che mostra come il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ è, come si dice, un *processo a soglia*, nel senso che, affinchè esso possa avere luogo, l'energia E dell'elettrone deve essere almeno pari alla massa M del muone (da qui si può notare per la prima volta l'importanza dell'energia di riposo di una particella).

5.2.1 Polarizzazioni

A questo punto, se non scegliamo una polarizzazione per gli elettroni iniziali (ovvero li consideriamo non polarizzati), dobbiamo prendere il valor medio di $|\mathfrak{M}|^2$ su tutti gli stati iniziali di polarizzazione; mentre se non siamo interessati ad una ben precisa polarizzazione dei muoni finali, dobbiamo sommare $|\mathfrak{M}|^2$, per il teorema della probabilità totale, su tutti gli stati finali di polarizzazione.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{q}'}} = \frac{e^4 m^2 M^2}{64E^6 (2\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}'|}{|\mathbf{p}|} \frac{1}{4} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{r'=1}^2 \sum_{s'=1}^2 |\mathfrak{M}|^2 \quad (5.72)$$

Facendo un pò di algebra si ha

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \sum_{r',s'} |\mathfrak{M}|^2 &= \sum_{r,s} \sum_{r',s'} |g^{\rho\sigma} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s')|^2 \\ &= \sum [g^{\mu\nu} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\mu u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\nu v_m(\mathbf{q}', s')] \cdot [g^{\rho\sigma} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma_\rho u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma_\sigma v_m(\mathbf{q}', s')] \\ &= \sum g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma^\mu u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma^\nu v_m(\mathbf{q}', s') \cdot \bar{v}_m(\mathbf{q}', s') \gamma^\sigma u_m(\mathbf{p}', r') \bar{u}_e(\mathbf{p}, r) \gamma^\rho v_e(\mathbf{q}, s) \\ &= g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \sum_{r,s} \bar{v}_e(\mathbf{q}, s) \gamma^\mu u_e(\mathbf{p}, r) \bar{u}_e(\mathbf{p}, r) \gamma^\rho v_e(\mathbf{q}, s) \sum_{r',s'} \bar{u}_m(\mathbf{p}', r') \gamma^\nu v_m(\mathbf{q}', s') \bar{v}_m(\mathbf{q}', s') \gamma^\sigma u_m(\mathbf{p}', r') \\ &= g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ \left[\frac{\not{q} - m}{2m} \right] \gamma^\mu \left[\frac{\not{p} + m}{2m} \right] \gamma^\rho \right\} \text{Tr} \left\{ \left[\frac{\not{p}' + M}{2M} \right] \gamma^\nu \left[\frac{\not{q}' - M}{2M} \right] \gamma^\sigma \right\}, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ (vedi per completezza pag 340 Patrì). Ora sappiamo che vale (vedi appendice Patrì)

$$\begin{cases} \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0 & \text{con } n \text{ dispari} \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = g^{\mu\nu} \text{Tr} \mathbb{I} = 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} \sum_{r',s'} |\mathfrak{M}|^2 &= g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \text{Tr} \left\{ \left[\frac{\not{q} - m}{2m} \right] \gamma^\mu \left[\frac{\not{p} + m}{2m} \right] \gamma^\rho \right\} \text{Tr} \left\{ \left[\frac{\not{p}' + M}{2M} \right] \gamma^\nu \left[\frac{\not{q}' - M}{2M} \right] \gamma^\sigma \right\} \\ &= \frac{g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{16m^2 M^2} \left[\text{Tr}(\not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\rho) - m^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho) \right] \left[\text{Tr}(\not{p}' \gamma^\nu \not{q}' \gamma^\sigma) - M^2 \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\sigma) \right] \\ &= \frac{g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{16m^2 M^2} \left[q_\alpha p_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\rho) - 4m^2 g^{\mu\rho} \right] \left[p'_\alpha q'_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\sigma) - 4M^2 g^{\nu\sigma} \right] \\ &= \frac{g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}}{m^2 M^2} \left[q^\mu p^\rho - q_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} g^{\mu\rho} + q^\rho p^\mu - m^2 g^{\mu\rho} \right] \left[p'^\nu q'^\sigma - p'_\alpha q'_\beta g^{\alpha\beta} g^{\nu\sigma} + p'^\sigma q'^\nu - M^2 g^{\nu\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

I conti da qui sono noiosi nonchè poco istruttivi. Esprimiamo il risultato finale effettuando una conveniente approssimazione. Poichè l'energia E dell'elettrone deve essere almeno uguale all'energia di soglia data dalla massa M del muone ovvero vale $m^2 + |\mathbf{p}|^2 \approx M^2$, segue

$$\frac{m^2 + |\mathbf{p}|^2}{M^2} = \left(\frac{m}{M} \right)^2 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{M^2} \approx \frac{|\mathbf{p}|^2}{M^2} \approx 1, \quad (5.74)$$

perchè $m^2/M^2 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ e quindi possiamo assumere che $|\mathbf{p}| \approx E$ (ovvero gli elettroni sono relativistici $v \approx 1$). Con questa approssimazione abbiamo che

$$\sum_{r,s} \sum_{r',s'} |\mathfrak{M}|^2 = \frac{4E^2 (E^2 + M^2 + |\mathbf{p}'|^2 \cos^2 \theta)}{m^2 M^2} \quad (5.75)$$

dove θ è l'angolo di scattering. La sezione d'urto differenziale assume la forma (anche utilizzando $|\mathbf{p}| \approx E$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{q}'}} = \frac{e^4 |\mathbf{p}'| (E^2 + M^2 + |\mathbf{p}'|^2 \cos^2 \theta)}{256\pi^2 E^5}. \quad (5.76)$$

Si riconosce immediatamente che il risultato ottenuto ha le dimensioni dell'inverso del quadrato di un'energia, ossia di un'area.

Infine se l'elettrone ha energia relativistica $E \gg M$, si può approssimare $|\mathbf{p}'| \approx E$ e trascurare M^2 rispetto a E^2 . Con tali assunzioni la sezione d'urto differenziale assume la forma relativistica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathbf{q}'}} = \frac{e^4 (1 + \cos^2 \theta)}{256\pi^2 E^2}. \quad (5.77)$$

5.3 Processi del primo ordine

Vogliamo osservare che la diffusione di un elettrone su un nucleo pesante che abbiamo studiato *non* è un processo con assorbimento o emissione di fotoni. In un processo di diffusione in cui vi sia un assorbimento o emissione di fotoni, il contributo al primo ordine della matrice S risulta nulla, ovvero è, come si dice, *cinematicamente nullo*. Il primo ordine della matrice S è dato da

$$S = -ie \int d^4x : [\bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x)] : \quad (5.78)$$

a cui corrispondono 8 processi che si ricavano dallo sviluppo di $(c^\dagger + d)(a + a^\dagger)(c + d^\dagger)$. Dal punto di vista diagrammatico vi possono essere solo particelle reali (non ci sono contrazioni, vedi dopo). Gli unici processi che possiamo descrivere sono quelli che coinvolgono elettroni (o positroni) negli stati iniziale e finale e un fotone nello stato iniziale o finale (6 processi in tutto). Questi processi sono cinematicamente nulli perchè non si conserva il quadriimpulso. Prendiamo ad esempio il caso $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ con relativi quadriimpulsi $p \rightarrow p' + k$. Se ci mettiamo nel sistema di riferimento di riposo dell'elettrone la conservazione del quadriimpulso diventerebbe $m_e = E' + |\mathbf{k}|$, dove E' è l'energia dell'elettrone. Ma questo ovviamente non è possibile in quanto $E' > m_e$ e $|\mathbf{k}| > 0$. In altre parole, gli elementi di matrice di questi processi esistono; tuttavia svolgendo tutti i calcoli avremo a che fare con delle delte che imporranno la conservazione del quadriimpulso. Tuttavia il quadriimpulso in questi processi non si può conservare (per vederlo basta mettersi nel sistema del centro di massa degli elettroni o positroni o elettroni e positroni coinvolti).

I termini del primo ordine sono presenti, tranne nei casi in cui *non* c'è conservazione del quadriimpulso. Ad esempio nel processo analizzato in precedenza riguardante lo scattering di un elettrone in un potenziale *esterno*. Ovviamente sono possibili processi in cui si producono più di un fotone, ad esempio due (un elettrone e un positrone non possono andare in un fotone solo, ma in due sì). Tuttavia in questi casi, il processo è di ordine più elevato.

5.4 Diagrammi di Feynman

Come abbiamo visto in $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, l'elemento di matrice S_{fi} al secondo ordine di un certo processo di diffusione è sempre dato dal prodotto di una parte, che potremmo chiamare *cinematica*, moltiplicata per il termine $\mathfrak{M}$, denominato *ampiezza di Feynman*. Possiamo osservare che negli elementi di matrice S dei processi di diffusione in analisi (elettrone-positrone e Compton, non ancora esaminato) vi sono delle caratteristiche ricorsive che permettono di scrivere gli elementi di matrice al secondo ordine dei vari processi senza che si debba sviluppare ogni volta l'espansione operatoriale della matrice S stessa. Innanzitutto introduciamo i cosiddetti *diagrammi di Feynman* che permetteranno di scrivere facilmente i termini perturbativi dello sviluppo della matrice S . Orientando il tempo in orizzontale da sinistra verso destra, rappresentiamo un fotone con una "linea ondeggiante" e il fermione con un segmento orientato da una freccia nel mezzo del segmento stesso (linea fermionica): le particelle fermioniche hanno la freccia orientata come il tempo, mentre le antiparticelle fermioniche hanno la freccia con verso opposto rispetto al tempo. A questo punto rappresentiamo un processo di diffusione con dei diagrammi che vengono disegnati in modo che valgano le seguenti proprietà:

- vi sono tanti punti, detti *punti interni* o *vertici*, quanto è l'ordine di sviluppo della matrice S . Nel caso dei processi al secondo ordine ve ne saranno, pertanto, due;

- i due punti interni sono collegati da una *linea interna* (fermionica o fotonica) corrispondente al propagatore (contrazione) che si considera nel processo in oggetto. Poichè l'interazione dell'elettrodinamica è $\psi A(x) \psi$, che è un termine contenente due fermioni e un fotone, ogni punto interno è sempre l'intersezione di due linee fermioniche e di una linea fotonica, in modo che in ogni vertice sia conservato il quadriimpulso totale;
- per il verso dei fotoni adottiamo la convenzione per cui la freccia del fotone nello stato iniziale è rivolta verso il vertice corrispondente, mentre la freccia del fotone nello stato finale è uscente dal vertice corrispondente;
- i diagrammi associati ad un processo di diffusione sono tutti quelli che si possono ottenere combinando tra loro *in tutti i modi possibili* le linee esterne e i vertici, compatibilmente con le leggi di conservazione che le simmetrie della lagrangiana impongono sui punti interni. Una composizione di linee esterne, con relativi quadriimpulsi, e vertici viene denominata *topologia di un diagramma*. La totalità delle combinazioni è pertanto l'insieme dei diagrammi aventi *topologie distinte*. Si può dimostrare che, relativamente ad un processo, solo la somma su tutti i possibili diagrammi risulta invariante di gauge, mentre il singolo diagramma del processo non è invariante di gauge.

I diagrammi dei processi ottenuti con questa procedura prendono il nome di *diagrammi di Feynman* e osserviamo che quando si scambiano tra loro le linee esterne in tutti i modi possibili, può accadere che una linea esterna corrispondente ad una particella nello stato iniziale sia congiunta ad un vertice con la linea esterna corrispondente ad una particella nello stato finale, e viceversa. Un particolare esempio di ciò si vedrà nell'effetto Compton. In ogni caso, queste combinazioni, sono del tutto coerenti con la teoria. Il ruolo dei diagrammi di Feynman è solo quello di facilitare l'applicazione del metodo perturbativo, senza che essi abbiano un significato fisico diretto. Nel caso del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ che abbiamo studiato i diagrammi possibili sono 2.

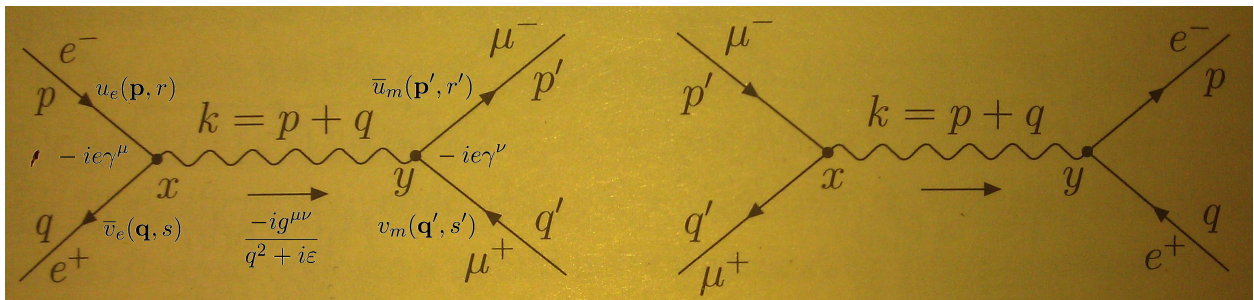


Figura 5.2. Possibili diagrammi di Feynman per il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Poichè, come si vede, i due diagrammi riportati in Fig. (5.2) danno il medesimo contributo analitico perchè differiscono tra loro solo per lo scambio dei punti x, y , segue che l'elemento di matrice del processo si può ottenere moltiplicando per 2 il primo dei diagrammi in modo che il denominatore $2!$ della matrice S venga quindi semplificato. Questo è vero anche all'ordine n : infatti all'ordine n vi saranno anche n vertici e, pertanto, $n!$ modi di scambiarli.

Per quanto riguarda invece il processo Compton $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$, abbiamo che i diagrammi che lo rappresentano sono quattro, suddivisi in due coppie di diagrammi uguali. Questi sono rappresentati in Fig. (5.3).

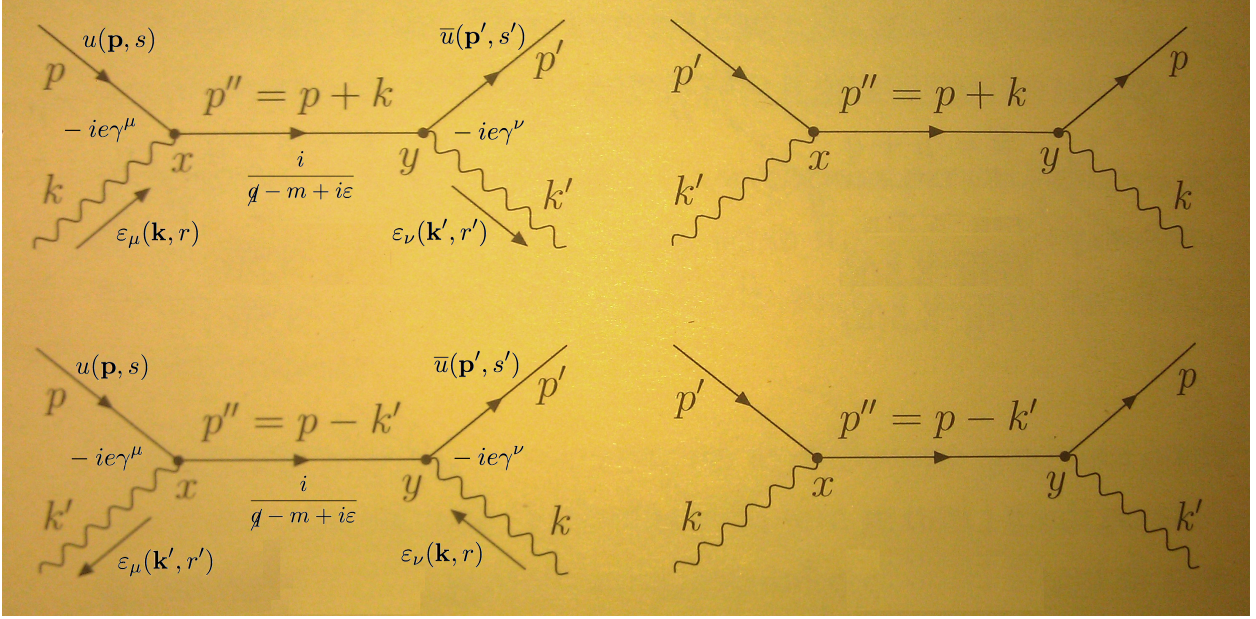


Figura 5.3. Possibili diagrammi di Feynman per il processo $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.

Ci si rende conto che i diagrammi nelle figure in alto a sinistra e in alto a destra sono uguali, così come i diagrammi in basso a sinistra e in basso a destra. Questo perchè uno è ottenuto dall'altro semplicemente scambiando i vertici x, y . Quindi l'effetto Compton può essere descritto sommando solo i due diagrammi sulla sinistra, con la semplificazione del $2!$ al denominatore della matrice S . Se analizziamo attentamente gli elementi di matrice S_{fi} dell'unico processo esaminato $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (ma è così anche se avessimo fatto i conti sull'effetto Compton), possiamo dunque dedurre le cosiddette *regole di Feynman* dell'elettrodinamica quantistica che permettono di scrivere direttamente il fattore cinematico e il fattore $\mathfrak{M}$ per gli elementi di matrice S al secondo ordine di tutti i processi di diffusione.

5.4.1 Scrittura del termine cinematico

Se per i campi utilizziamo le scritture a volume finito, il termine cinematico è dato da

$$(2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \prod_j F_j \quad (5.79)$$

dove P_i e P_f sono rispettivamente l'impulso totale iniziale e l'impulso totale finale; gli F_j sono tutti i coefficienti radicali dei campi corrispondenti a ciascuna linea esterna ovvero

$$F_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{p}|}} \rightarrow \text{fotoni} \\ \sqrt{\frac{m}{VE}} \rightarrow \text{fermioni} . \end{cases} \quad (5.80)$$

5.4.2 Scrittura dell'ampiezza di Feynman

Consideriamo la particella di carica negativa come *particella* e la particella di carica positiva come *antiparticella*, il termine $\mathfrak{M}$ si ottiene scrivendo nell'ordine gli spinori da sinistra verso destra secondo *il verso opposto a quello delle frecce fermioniche*. Dopo aver stabilito il legame tra le posizioni degli spinori e il verso delle frecce, possiamo scrivere il termine $\mathfrak{M}$ sulla base delle seguenti *regole di Feynman*, riportando

- un fattore u per ogni *particella* nello stato iniziale;
- un fattore $\bar{v}$ per ogni *antiparticella* nello stato iniziale;
- un fattore $\bar{u}$ per ogni *particella* nello stato finale;
- un fattore v per ogni *antiparticella* nello stato finale;
- un fattore $ie\gamma^\mu$ per ogni vertice;
- un fattore ε_μ per ogni fotone nello stato iniziale o finale. Notare che l'indice di ε_μ va a contrarsi con la corrispondente γ^μ del vertice a cui si attacca la linea esterna fotonica;
- il propagatore $G(q)$ per ogni linea interna, dove l'impulso q del propagatore è fissato dalla conservazione del quadriimpulso in ogni vertice e l'espressione del propagatore è

$$\text{Fotone} \rightarrow G^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}, \quad \text{Fermione} \rightarrow G(q) = \frac{i}{\not{q} - m + i\varepsilon} \quad (5.81)$$

a seconda che la linea interna sia rispettivamente un fotone o un fermione.

- un segno relativo discorde tra due diagrammi che differiscono per uno scambio di fermioni (questo deriva dalle regole di anticommutazione per i fermioni). Un esempio possono essere i due diagrammi a sinistra della Fig. (5.3) relativa all'effetto Compton.

La linea fermionica non si interrompe mai perchè “porta” numeri quantici conservati, mentre una linea che “porti” numeri quantici non conservati può interrompersi.

5.5 Effetto Compton

L'effetto Compton è la diffusione elastica di un fotone su un elettrone, ovvero $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$. La lagrangiana del processo è

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\not{A}\psi. \quad (5.82)$$

e con l'interazione che si ricava dal suo ultimo termine si costruisce la matrice S , la quale, sviluppata al secondo ordine, è (come abbiamo appena visto i termini del primo ordine si annullano)

$$S - I = -\frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y T \left[\left(\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \right)_x \left(\bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi \right)_y \right]. \quad (5.83)$$

Abbiamo ora come stati iniziali e finali

$$\begin{cases} |i\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}, r) b^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle \\ |f\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}', r') b^\dagger(\mathbf{p}', s') |0\rangle \end{cases} \quad (5.84)$$

Abbiamo visto in precedenza che contraendo i campi fotonici posso descrivere dei processi in cui non vi sono fotoni negli stati iniziale e finale ma solo fermioni. Ora invece, poichè negli stati iniziale e finale vi sono un fotone e un elettrone, segue che nella matrice S dobbiamo considerare solo una contrazione dei campi fermionici (il valor medio sullo stato di vuoto dei campi fermionici seleziona solo operatori che creano ma poi annichilano il fermione). Le contrazioni di campi fermionici, in questo caso, danno origine a fotoni esterni. Le possibili contrazioni sono due

$$S - I = -\frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y : \left[\overline{(\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi)_x (\bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi)_y} \right] : - \frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y : \left[\overline{(\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi)_x (\bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu \psi)_y} \right] :$$

da cui si ottiene

$$S - I = -\frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y iS_F(y-x) : \left[(\gamma^\mu A_\mu \psi)_x (\bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu)_y \right] : \\ - \frac{e^2}{2} \int d^4x d^4y iS_F(x-y) : \left[(\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu)_x (\gamma^\nu A_\nu \psi)_y \right] :$$

Questi due termini sono uguali in quanto l'uno equivalente all'altro con uno scambio di variabili x e y . Infatti, poichè il time-ordering è invariante per scambio dei suoi argomenti, si vede subito che fare una contrazione è perfettamente equivalente a fare l'altra. L'esistenza di due contrazioni distinte permette di eliminare il $2!$ a denominatore nell'espansione della matrice S . Come dicevamo in precedenza, questo è sempre vero: a qualsiasi ordine noi andiamo quando facciamo un certo insieme di contrazioni notiamo che per alcune di esse stiamo facendo le stesse contrazioni ma con i vertici scambiati. Siccome le permutazioni di n vertici sono $n!$, ad ogni ordine $n!$ a denominatore si cancella.

Utilizzando i diagrammi in Fig. (5.3), possiamo scrivere le due ampiezze di Feynman (ricorda che bisogna sempre partire dal termine della linea fermionica!)

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_a = (-ie)^2 \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') \frac{i}{\not{k} + \not{p} - m + i\varepsilon} \not{\epsilon}(\mathbf{k}, r) u(\mathbf{p}, s) \\ \mathfrak{M}_b = (-ie)^2 \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{\epsilon}(\mathbf{k}, r) \frac{i}{\not{p} - \not{k}' - m + i\varepsilon} \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s). \end{cases} \quad (5.85)$$

L'ampiezza totale è ovviamente la somma delle due

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_a + \mathfrak{M}_b. \quad (5.86)$$

5.5.1 Somma sulle polarizzazioni

Vediamo ora come affrontare le somme sulle polarizzazioni quando vi sono presenti delle polarizzazioni fotoniche. Ricordiamo che l'equazione

$$(\not{p} - m) u(p) = 0 \quad (5.87)$$

implica, per la relazione $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, la corrispondente equazione per $\bar{u}(p)$

$$u^\dagger (\not{p}^\dagger - m) = 0 \implies u^\dagger (\not{p}^\dagger - m) \gamma^0 = 0 \implies \bar{u}(p) (\not{p} - m) = 0. \quad (5.88)$$

Andiamo a vedere cosa succede se, nelle ampiezze di Feynman, sostituiamo $\not{k}$ al posto di $\not{\epsilon}$. Partiamo ad esempio da $\mathfrak{M}_b$

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{k} \frac{i}{\not{p} - \not{k}' - m} \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{k} \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s), \quad (5.89)$$

dove ho sfruttato la conservazione del quadriimpulso $p - k' = p' - k$. Ora possiamo aggiungere a numeratore un $-\not{p}' + m$ in quanto questo, applicato a $\bar{u}(p)$ abbiamo prima dimostrato che fa zero

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{k} \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \frac{i(\not{k} - \not{p}' + m)}{\not{p}' - \not{k} - m} \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s) \\ &= -i \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Allo stesso modo il primo termine della ampiezza di Feynman $\mathfrak{M}_a$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') \frac{i}{\not{k} + \not{p} - m + i\varepsilon} \not{k} u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') \frac{i(\not{k} + \not{p} - m)}{\not{k} + \not{p} - m + i\varepsilon} u(\mathbf{p}, s) \\ &= i \bar{u}(\mathbf{p}', s') \not{\epsilon}(\mathbf{k}', r') u(\mathbf{p}, s), \end{aligned} \quad (5.91)$$

che da un contributo opposto a $\mathfrak{M}_b$. Pertanto possiamo formulare un teorema che afferma che se sostituiamo $\not{k}$ a $\not{\epsilon}(\mathbf{k}, r)$, l'ampiezza di Feynman si annulla. Questo teorema si chiama *teorema della Gauge invarianza* o *della conservazione della corrente*. Questo teorema è generale, e vale anche per processi complicatissimi (può essere utilizzato anche per una verifica dei calcoli). Questo non deve sorprendere in quanto la ragione risiede nella conservazione della quadricorrente. Infatti quando abbiamo un diagramma di Feynman come può essere quello dell'effetto Compton, il fotone entrante si accoppia sempre con l'elemento di matrice della corrente conservata dell'elettrone. Pertanto quando andiamo a mettere al posto di ϵ^μ , k^μ questo teorema può essere molto utile. Questo infatti era stato verificato esplicitamente nel caso dei fotoni virtuali (vedi il propagatore del fotone). Nel caso dei fotoni virtuali avevamo direttamente dei termini dipendenti da k^μ , che potevano essere buttati via tramite una integrazione per parti e sfruttando la conservazione della quadricorrente. Nel caso dei fotoni reali, invece, abbiamo degli ϵ^μ ; se avessimo un modo di sostituire a questi ϵ^μ i k^μ , sarebbe zero per lo stesso motivo (teorema della Gauge invarianza). Vediamolo ora esplicitamente. Supponiamo che ci interessi la sezione d'urto non polarizzata (il fascio iniziale di elettroni e fotoni sono polarizzati 50% in un verso e 50% in un altro; inoltre non ci interessa osservare una particolare polarizzazione degli elettroni e fotoni finali). Identificando

$$\mathfrak{M} \rightarrow \epsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \epsilon^\nu(\mathbf{k}', r') \mathfrak{M}_{\mu\nu} \quad (5.92)$$

per una certa funzione $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ che non contiene le polarizzazioni dei fotoni. Dobbiamo calcolare ora la somma sulle polarizzazioni fotoniche

$$\begin{aligned} &\sum_{r, r'} \epsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \epsilon^\nu(\mathbf{k}', r') \mathfrak{M}_{\mu\nu} \cdot \epsilon^\rho(\mathbf{k}, r) \epsilon^\sigma(\mathbf{k}', r') \mathfrak{M}_{\rho\sigma}^* \\ &= \left(\sum_r \epsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \epsilon^\rho(\mathbf{k}, r) \right) \left(\sum_{r'} \epsilon^\nu(\mathbf{k}', r') \epsilon^\sigma(\mathbf{k}', r') \right) \mathfrak{M}_{\mu\nu} \mathfrak{M}_{\rho\sigma}^* \end{aligned} \quad (5.93)$$

Utilizziamo ora la relazione di completezza (studiata nel propagatore del fotone) che per comodità riscriviamo qui

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{k}, r) &= -g^{\mu\nu} - \hat{k}^\mu \hat{k}^\nu + \eta^\mu \eta^\nu \\
&= -g^{\mu\nu} + \eta^\mu \eta^\nu - \frac{(k^\mu - (k \cdot \eta) \eta^\mu)(k^\nu - (k \cdot \eta) \eta^\nu)}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} \\
&= -g^{\mu\nu} + \eta^\mu \eta^\nu - \frac{k^\mu p^\nu}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} + \frac{(k \cdot \eta)[k^\mu \eta^\nu + k^\nu \eta^\mu]}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} - \frac{(k \cdot \eta)^2 \eta^\mu \eta^\nu}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} \\
&= -g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu p^\nu}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} + \frac{(k \cdot \eta)[k^\mu \eta^\nu + k^\nu \eta^\mu]}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} - \eta^\mu \eta^\nu \frac{k^2}{k^2}
\end{aligned} \tag{5.94}$$

k^0 in generale è arbitrario; mettiamoci ora proprio il k^0 del fotone reale, ovvero $k^0 = |\mathbf{k}|$. L'ultimo termine pertanto scompare (in quanto $k^2 = 0$) e otteniamo

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{k}, r) = -g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu p^\nu}{(k \cdot \eta)^2 + k^2} + \frac{(k \cdot \eta)[k^\mu \eta^\nu + k^\nu \eta^\mu]}{(k \cdot \eta)^2 + k^2}. \tag{5.95}$$

Tuttavia vediamo che il termine sulla destra è equivalente a sostituire uno o tutti e due gli $\varepsilon^\mu, \varepsilon^\nu$ con il corrispondente k^μ, k^ν . Per il teorema di Gauge invarianza dimostrato in precedenza, quando sostituiamo ad ogni ε^μ il corrispondente k^μ e contraiamo il risultato con la $\mathfrak{M}$, il risultato è 0. Quindi tutti i termini che dipendono da k^μ si annullano e possiamo utilizzare come regola per la somma sulle polarizzazioni l'equazione

$$\boxed{\sum_{r=1}^2 \varepsilon^\mu(\mathbf{k}, r) \varepsilon^\nu(\mathbf{k}, r) = -g^{\mu\nu}}. \tag{5.96}$$

Capitolo 6

Teoria del Neutrino

6.1 Le equazioni di Weyl

Ci dobbiamo ora occupare del caso dei fermioni a massa nulla. Una volta si pensava che i *neutrini* fossero dei fermioni a massa nulla; in realtà probabilmente (è un problema ancora aperto) tutti i neutrini hanno una massa, sebbene molto piccola. L'approssimazione di massa nulla è quindi molto buona (ed è importante per la descrizione delle *interazioni deboli*). Nel caso di fermioni a massa nulla si presenta una discontinuità. Se ci ricordiamo l'equazione di Dirac

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta] \psi \quad (6.1)$$

avevamo detto che le $\boldsymbol{\alpha}$ e le β dovevano essere hermitiane e dovevano soddisfare proprietà quali l'anticommutatività $\{\alpha^i, \beta\} = 0$, $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}$ e la nilpotenza $(\alpha^i)^2 = \mathbb{I}$, $\beta^2 = \mathbb{I}$ da cui discende che gli autovalori di questi operatori possono essere soltanto ± 1 . Poichè inoltre le tracce di questi operatori devono essere nulle $\text{Tr}(\alpha^i) = 0$ e $\text{Tr}(\beta) = 0$, la dimensione N dello spazio sul quale agiscono questi operatori doveva essere per forza pari. Avevamo cercato la dimensione minima in cui vivevano questi operatori, trovandola pari a 4. Avevamo infatti notato che due dimensioni non bastavano in quanto non esistono 4 matrici 2×2 che anticommutavano tra di loro, ma se ne possono determinare al massimo solo 3.

Tuttavia, quando scriviamo l'equazione di Dirac a massa nulla, non ci serve più l'operatore β ; pertanto si possono trovare 3 matrici α^i che anticommutano tra di loro e che vivono in uno spazio *bidimensionale*. Possiamo quindi ridurre l'equazione di Dirac, iterandola, all'equazione di Klein-Gordon a massa nulla, per particelle di massa nulla, in uno spazio spinoriale che può avere 2 dimensioni. Avevamo visto che le matrici α^i, β erano determinate dalle regole di anticommutazione a meno di una trasformazione unitaria. Per $m = 0$, tuttavia, questo non è più vero. Infatti posso prendere come matrici α le tre matrici di Pauli

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}; \quad (6.2)$$

queste infatti soddisfano l'algebra delle matrici α^i con le relative regole di anticommutatività e di nilpotenza. L'equazione di Dirac a massa nulla con $\alpha^i = \sigma^i$

$$\boxed{i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi}, \quad (6.3)$$

si chiama *prima equazione di Weyl*. Questa tuttavia è una delle equazioni di Weil, perchè la realizzazione $\alpha^i = \sigma^i$ non è unica. Un'altra realizzazione è, infatti

$$\alpha = -\sigma \quad (6.4)$$

perchè verificano anch'esse le stessa algebra della α^i . Tuttavia non sono unitariamente equivalenti perchè le matrici di Pauli σ^i e le matrici $-\sigma^i$ verificano le regole di commutazione

$$\begin{cases} [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k \\ [-\sigma^i, -\sigma^j] = -2i\varepsilon^{ijk}(-\sigma^k) \end{cases}$$

quindi non esiste nessuna trasformazione unitaria che trasforma tutte e tre le σ in $-\sigma$ e pertanto queste rappresentazioni non sono equivalenti. Una conseguenza di ciò è che esiste una *seconda equazione di Weyl*

$$\boxed{i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\sigma \cdot \mathbf{p}\psi}. \quad (6.5)$$

Le ψ sono diverse nelle due equazioni e sono oggetti bidimensionali. Queste equazioni lo vedremo tra poco sono covarianti secondo trasformazioni di Lorentz proprie. Vediamo quindi subito che con la parità (che appartiene alle trasformazioni di Lorentz non proprie) c'è qualcosa che non va in quanto non abbiamo la matrice $\beta = \gamma^0$. La parità effettivamente è violata nelle interazioni deboli.

6.2 Particelle *right* e *left-handed*

Cerchiamo ora soluzioni della prima equazione di Weil della forma

$$\psi = u(q)e^{-iqx} \quad (6.6)$$

con $u(q)$ generico spinore bidimensionale (diverso da quello di Dirac). Andando a sostituire nella prima equazione di Weyl otteniamo

$$q^0 u = \sigma \cdot \mathbf{p} u. \quad (6.7)$$

Se iteriamo questa equazione e utilizziamo il risultato ben noto $(\sigma \cdot \mathbf{q})^2 = \mathbf{q}^2$, otteniamo

$$q^0(\sigma \cdot \mathbf{p})u = (q^0)^2 u = (\sigma \cdot \mathbf{p})^2 u = \mathbf{q}^2 u \implies (q^0)^2 = \mathbf{q}^2 \quad (6.8)$$

quindi giustamente stiamo descrivendo particelle di massa nulla; tuttavia sono possibili sia soluzioni ad energia positiva che soluzioni ad energia negativa. Prendendo quelle con energia positiva $E = |\mathbf{q}|$ abbiamo

$$E = |\mathbf{q}| \implies u = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{q}|} u. \quad (6.9)$$

Abbiamo quindi trovato che ψ è soluzione ad energia positiva se u è autostato dell'elicità con autovalore $+1/2$. Infatti, poichè lo spin è $\frac{\sigma}{2}$, vediamo che la proiezione dello spin lungo la direzione del moto (versore) è sempre $1/2$. Quindi stiamo parlando sempre di una particella di spin $1/2$ che ha elicità $1/2$, contrariamente agli elettroni che avevano $\pm 1/2$. In altre parole abbiamo una particella di spin $1/2$ che ha *un solo stato di polarizzazione*. Questo suona di nuovo male per la parità. Infatti se facciamo una trasformazione di parità su questo sistema succede che l'impulso

cambia segno ma il momento angolare no, poichè è uno pseudovettore. Quindi una particella con elicità positiva si trasformerebbe in una particella con elicità negativa, che però non è presente. Se fossi partito dalla seconda equazione di Weyl, avrei ottenuto che l'elicità sarebbe stata $-1/2$. Le particelle con elicità $1/2$ si chiamano *right-handed* mentre quelle con elicità $-1/2$ *left-handed*. Sotto parità una particella right-handed va a finire in una left-handed e viceversa. Dirac invece, possedendo il doppio dei gradi di libertà di una equazione di Weyl (spinore a 4 componenti), ha la proprietà che la parità è conservata.

6.3 Connessioni con Dirac

Vediamo ora come si connette quello che stiamo dicendo con l'equazione di Dirac. L'equazione di Dirac a massa nulla si scrive così

$$i\not{\partial}\psi = 0. \quad (6.10)$$

questa è una equazione a 4 componenti in cui non ho il problema della parità in quanto ho ancora γ^0 . Come posso passare da una equazione in 4 componenti ad una a 2? Possiamo introdurre due proiettori

$$\mathcal{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad \mathcal{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}. \quad (6.11)$$

Per essere dei proiettori devono essere oggetti hermitiani e idempotenti. La prima proprietà è verificata dal fatto che la matrice $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ è hermitiana. La idempotenza è verificata dal semplice calcolo (usando $(\gamma^5)^2 = 1$)

$$\left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2}\right)^2 = \frac{(1 \pm \gamma^5)^2}{4} = \frac{1 + 1 \pm 2\gamma^5}{4} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}. \quad (6.12)$$

Inoltre si può mostrare che sono proiettori *ortogonali*, ossia che proiettano su sottospazi ortogonali

$$\frac{1 - \gamma^5}{2} \frac{1 + \gamma^5}{2} = \frac{1 - (\gamma^5)^2}{2} = 0. \quad (6.13)$$

Per capire ora quale è la dimensione degli spazi sui quali questi proiettori proiettano, basta calcolarne la traccia (la traccia ci conta quanti autovalori sono diversi da zero)

$$\text{Tr}(\mathcal{P}_R) = \frac{1}{2}\text{Tr}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2}\text{Tr}(1) + \frac{1}{2}\text{Tr}(\gamma^5) = 2, \quad (6.14)$$

poichè $\text{Tr}(\gamma^5) = 0$. Similmente si può verificare che $\text{Tr}(\mathcal{P}_L) = 2$. Non ci deve quindi sorprendere che questi due proiettori, applicati agli spinori di Dirac, mi danno i due spinori di Weyl. Poichè la somma dei due proiettori $\mathcal{P}_R$ e $\mathcal{P}_L$ fa 1, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R \\ \psi_L &= \mathcal{P}_L \psi \\ \psi_R &= \mathcal{P}_R \psi \end{aligned} \quad (6.15)$$

L'equazione di Dirac diventa

$$(i\not{\partial} - m)\psi = (i\not{\partial} - m)(\psi_L + \psi_R) = 0 \implies i\not{\partial}\psi_L - m\psi_L + i\not{\partial}\psi_R - m\psi_R = 0 \quad (6.16)$$

Ora proiettiamo l'equazione di Dirac con il proiettore $\mathcal{P}_R$ e $\mathcal{P}_L$. Poichè la matrice γ^5 anticommute con tutte le matrici γ , abbiamo che

$$\begin{cases} \mathcal{P}_L(i\not{\partial}\psi_L) = \frac{1-\gamma^5}{2}(i\not{\partial}\psi_L) = i\not{\partial}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\psi_L\right) = i\not{\partial}\mathcal{P}_R\psi_L = 0 \\ \mathcal{P}_R(i\not{\partial}\psi_R) = \frac{1+\gamma^5}{2}(i\not{\partial}\psi_R) = i\not{\partial}\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_R\right) = i\not{\partial}\mathcal{P}_L\psi_R = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Svolgendo i conti abbiamo

$$\begin{cases} \mathcal{P}_R(i\not{\partial} - m)\psi = i\not{\partial}\mathcal{P}_L\psi - m\mathcal{P}_R\psi = 0 \\ \mathcal{P}_L(i\not{\partial} - m)\psi = i\not{\partial}\mathcal{P}_R\psi - m\mathcal{P}_L\psi = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

e quindi le equazioni proiettate (equivalenti all'equazione di Dirac) che otteniamo sono

$$\begin{cases} i\not{\partial}\psi_L - m\psi_R = 0 \\ i\not{\partial}\psi_R - m\psi_L = 0, \end{cases} \quad (6.19)$$

ovvero un insieme di equazioni *accoppiate* in ψ_R e ψ_L . Se prendo come condizione iniziale $\psi_L = 0$, queste equazioni implicano che si genererà una componente left. Quindi a $m \neq 0$ le componenti left e right si mescolano. Tuttavia, se la massa della particella è 0 le equazioni si disaccoppiano (se prendiamo una condizione $\psi_R = 0$ questa rimarrà sempre 0).

6.4 Rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz

Ci chiediamo ora se è possibile restringere la teoria ad una sola delle due equazioni e mantenere l'invarianza di Lorentz. Questa è stata studiata per l'equazione di Dirac ed è realizzata mediante la trasformazione $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$.

6.4.1 Trasformazioni di Lorentz proprie

La $S(\Lambda)$ è stata determinata per le trasformazioni infinitesime proprie e per la parità con γ^0 . Nel caso delle trasformazioni di Lorentz proprie infinitesime avevamo trovato che

$$S(\Lambda) = \mathbb{I} + \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (6.20)$$

Le trasformazioni di Lorentz proprie finite si ricavano facendo infiniti prodotti di trasformazioni infinitesime. Poichè la matrice γ^5 anticommute con tutte le matrici γ ($\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$), si vede subito che

$$\gamma^5 S(\Lambda) \gamma^5 = S(\Lambda) \implies [S(\Lambda), \gamma^5] = 0. \quad (6.21)$$

Ovviamente per ogni trasformazione di Lorentz propria finita continua a valere ciò che viene ricavato nel caso infinitesimo. Come avevamo detto in precedenza la $S(\Lambda)$ che abbiamo trovato è una *rappresentazione* del gruppo di Lorentz proprio, detta *rappresentazione spinoriale*. Come sappiamo una rappresentazione è una corrispondenza tra gli elementi del gruppo (in questo caso gli elementi del gruppo di Lorentz sono le Λ stesse) e un insieme di matrici ($S(\Lambda)$). Quindi le $S(\Lambda)$ forniscono

una rappresentazione del gruppo di Lorentz se data $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$ con Λ_1 e Λ_2 appartenenti al gruppo di Lorentz (Λ_3 per definizione di gruppo appartiene al gruppo di Lorentz), allora vale

$$S(\Lambda_3) = S(\Lambda_2)S(\Lambda_1) \quad (6.22)$$

e quindi le matrici $S(\Lambda)$ forniscono una “rappresentazione” dell’operazione del gruppo, fatta nello spazio degli operatori lineari che in questo caso è quadridimensionale. Una rappresentazione si dice *irriducibile* se non esistono dei sottospazi *propri invarianti* per tutti gli elementi della rappresentazione. Con proprio intendiamo che questo sottospazio non deve essere banale (ovvero il sottospazio vuoto oppure quello che coincide con tutto lo spazio). Quindi partendo da un sottospazio non banale del gruppo, se gli applichiamo tutte le $S(\Lambda)$ possibili rimanendo nello stesso sottospazio, allora il sottospazio è invariante. La rappresentazione è detta quindi *riducibile* se tutti i suoi sottospazi non banali sono invarianti per l’applicazione di tutti gli elementi $S(\Lambda)$ della rappresentazione.

In virtù della proprietà $[S(\Lambda), \gamma^5] = 0$ la rappresentazione del gruppo di Lorentz proprio è riducibile, ovvero esistono dei sottospazi propri invarianti. Infatti

$$[S(\Lambda), \gamma^5] = 0 \implies [S(\Lambda), \mathcal{P}_{L,R}] = 0 \quad (6.23)$$

e quindi l’applicazione di $S(\Lambda)$ al sottospazio generato da $\mathcal{P}_L$ ad esempio, rimane nel sottospazio left

$$S(\Lambda) \mathcal{P}_L \psi = \mathcal{P}_L S(\Lambda) \psi \quad (6.24)$$

e analogamente per il sottospazio right. I sottospazi left e right sono pertanto due sottospazi propri invarianti e quindi la rappresentazione $S(\Lambda)$ del gruppo di Lorentz è riducibile: le trasformazioni di Lorentz applicate ad una soluzione a massa nulla right o left-handed le lasciano right o left-handed. (In altre parole bastava trovare un solo sottoinsieme invariante per capire che il gruppo di Lorentz è riducibile: se $S(\Lambda)$ invece non commuta con nessuno dei proiettori su sottospazi non banali del gruppo allora la rappresentazione è irriducibile).

6.4.2 Parità

Nel capitolo su Dirac abbiamo trovato che la trasformazione di Lorentz non propria corrispondente alla parità è data dalla matrice γ^0

$$\psi'(x') = \gamma^0 \psi(x). \quad (6.25)$$

Notiamo subito che per la parità c’è un problema in quanto γ^0 non commuta con i proiettori $\mathcal{P}_L$ e $\mathcal{P}_R$, come valeva per la rappresentazione $S(\Lambda)$, ma anzi vale

$$\gamma^0 \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_R \gamma^0. \quad (6.26)$$

Un osservatore che vede nel suo laboratorio un campo che è left, sotto trasformazione di parità lo vedrà right, esattamente come avevamo visto in precedenza.

6.5 Il neutrino di Weyl

In natura i neutrini si comportano come particelle *left-handed*, ovvero con uno spin contrario alla direzione del moto. Tuttavia quello che faremo è trattare i due campi indipendentemente fino in

fondo

$$\begin{cases} i \not{\partial} \psi_L = 0 \\ i \not{\partial} \psi_R = 0, \end{cases} \quad (6.27)$$

con le condizioni

$$\begin{cases} \gamma^5 \psi_L = -\psi_L \\ \gamma^5 \psi_R = \psi_R. \end{cases} \quad (6.28)$$

La prima condizione ci dice che il campo ψ_L è autostato di γ^5 se pensiamo il campo left in 4 componenti (per Weyl è a 2 componenti). Siccome io sto decidendo di trattare il campo left come un campo di Dirac (e quindi 4 componenti) dobbiamo imporre un vincolo che è proprio quello descritto nella prima equazione in (6.28). Ho accettato di avere 4 componenti; tuttavia se ho 4 componenti indipendenti ho Dirac. L'analoga condizione per ψ_R è data dalla seconda delle (6.28). Ricordiamo qui per comodità l'espressione delle matrici γ^μ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

da cui si ricava l'espressione della matrice γ^5

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Cerchiamo ora una generica soluzione left a energia positiva ($p^0 > 0$) dell'equazione di Dirac nella forma

$$\psi = u(p) e^{-ipx}, \quad \text{con} \quad u(p) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Inserendo questa quantità nell'equazione di Dirac abbiamo

$$\not{p} u(p) = \begin{pmatrix} p^0 & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -p^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (6.32)$$

In più dobbiamo imporre che $u(p)$ sia effettivamente uno spinore left o right attraverso $\gamma^5 \psi_L = -\psi_L$ e $\gamma^5 \psi_R = \psi_R$

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

con il + nel caso right-handed e - nel caso left-handed. φ e χ sono collegati dalla relazione $\chi = \pm \varphi$; otteniamo quindi che gli spinori ammissibili sono

$$R \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad L \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ -\varphi \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

Risolvendo ora l'equazione (6.32) per degli spinori rispettivamente right e left otteniamo

$$\begin{cases} p^0 \varphi = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi \\ p^0 \varphi = -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \varphi, \end{cases} \quad (6.35)$$

che non sono equivalenti alle equazioni di Weyl in quanto la prima equazione da una elicità $1/2$, la seconda $-1/2$. Sostanzialmente abbiamo immerso le equazioni di Weyl in uno spazio quadridimensionale e ora le abbiamo proiettate su due spazi bidimensionali: il contenuto risulta essere identico.

Dobbiamo ancora normalizzare questi spinori. Tuttavia non possiamo imporre la prenormalizzazione che avevamo utilizzato nel caso di Dirac $\bar{u}(p)u(p) = 1$ perchè, ad esempio nel caso right

$$\bar{u}(p)u(p) = \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & \varphi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} = 0 \quad (6.36)$$

e come si può vedere molto facilmente nella (3.71). Tuttavia a noi non ci interessa la prenormalizzazione; ci interessa in realtà che $u^\dagger(p)u(p) = 1$ anche nel caso a massa nulla (la vera normalizzazione è quella con il prodotto scalare di Dirac). Non faccio pertanto lo step intermedio della prenormalizzazione e normalizzo direttamente secondo il prodotto scalare di Dirac

$$u^\dagger(p)u(p) = \begin{pmatrix} \varphi^\dagger & \varphi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} = 2\varphi^\dagger\varphi = 1 \quad \implies \quad \varphi^\dagger\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.37)$$

Nel caso delle soluzioni ad energia negativa

$$\psi = v(p)e^{ipx} \quad (6.38)$$

otteniamo per diretta sostituzione le stesse soluzioni

$$\not{p}v(p) = \begin{pmatrix} p^0 & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -p^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (6.39)$$

La soluzione generale dell'equazione sarà (nel formalismo della seconda quantizzazione direttamente)

$$\psi_{R,L}(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{R,L} \begin{pmatrix} \varphi \\ \pm\varphi \end{pmatrix} e^{-ipx} + b_{L,R}^\dagger \begin{pmatrix} \varphi \\ \pm\varphi \end{pmatrix} e^{ipx} \right] \quad (6.40)$$

dove abbiamo incluso dentro φ il fattore di normalizzazione $1/\sqrt{2}$. $a_{R,L}$ è un operatore che distrugge una particella (un neutrino) che ha polarizzazione R, L ; $b_{L,R}^\dagger$ crea una antiparticella (antineutrino) con polarizzazione L, R . Quindi se abbiamo solo un campo left di Dirac, allora possiamo avere o neutrini con polarizzazione left o antineutrini con polarizzazione right. Ciò non compariva esplicitamente in Dirac (vedi la sezione sul momento angolare del campo di Dirac): infatti mentre in Dirac erano presenti entrambe le elicità $\pm 1/2$ sia per le particelle che per le antiparticelle, ora ne abbiamo soltanto una sia per le particelle che per le antiparticelle. A causa del teorema della Noether, e a causa della convenzione (3.79) che abbiamo adottato nel campo di Dirac, abbiamo che particelle e antiparticelle quando $m = 0$ hanno elicità opposta.

6.6 Corrente Conservata

Vogliamo evidenziare ora il fatto che γ^0 è presente ancora in questa teoria. Da questo consegue che esiste ancora una corrente conservata. Infatti

$$\psi_L = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi \implies \psi_L^\dagger = \psi^\dagger \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \implies \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \quad (6.41)$$

e quindi

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L = \bar{\psi} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)^2 \psi = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) . \quad (6.42)$$

Il primo termine rappresenta la ben nota corrente conservata *vettoriale* di Dirac; il secondo termine viene chiamata *corrente assiale*. Questa è conservata solo nel caso la massa sia nulla. Per vederlo dobbiamo calcolare

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) ; \quad (6.43)$$

ricordando ora l'equazione di Dirac e la sua aggiunta

$$\begin{cases} (i\not{\partial} - m) \psi = 0 \\ \bar{\psi} (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} (\partial_\mu \psi) \gamma^\mu = -im\psi \\ (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu = im\bar{\psi}, \end{cases} \quad (6.44)$$

e quindi

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) = -im\bar{\psi} \gamma^5 \psi - im\bar{\psi} \gamma^5 \psi = -2im\bar{\psi} \gamma^5 \psi . \quad (6.45)$$

Pertanto *se la massa è zero la corrente assiale è conservata*. Ci chiediamo ora a quale simmetria della lagrangiana (con $m = 0$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi \quad (6.46)$$

corrisponde questa corrente conservata. La trasformazione che prendiamo in esame è denominata *trasformazione chirale*

$$\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5} \psi(x) \quad (6.47)$$

da cui segue

$$\psi'^{\dagger}(x) = \psi^{\dagger}(x) e^{-i\alpha\gamma^5} \implies \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\alpha\gamma^5} . \quad (6.48)$$

poichè γ^0 anticommuta con γ^5 e quindi anche con uno sviluppo di Taylor dell'esponenziale di γ^5 . Vediamo ora se questa trasformazione lascia invariata la lagrangiana di Dirac

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}' \not{\partial} \psi - m\bar{\psi}' \psi = i\bar{\psi} e^{i\alpha\gamma^5} \gamma^\mu e^{i\alpha\gamma^5} \partial_\mu \psi - m e^{2i\alpha\gamma^5} \bar{\psi} \psi = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - m e^{2i\alpha\gamma^5} \bar{\psi} \psi \quad (6.49)$$

pertanto $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ se e solo se $m = 0$. Pertanto per una teoria a massa nulla la corrente assiale è una corrente di Noether e la simmetria a cui corrisponde questa corrente è la trasformazione chirale.